Solovay-Reduzierbarkeit und Beschleunigbarkeit außerhalb von linksberechenbaren Zahlen

Ivan Titov

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Deutschland

Outline

Berechenbare Approximationen

Unter Approximation einer reellen Zahl α meint man normalerweise eine gegen α konvergierende Folge von Rationalzahlen. Um für eine solche Folge einen entsprechenden Berechenbarkeitsbegriff zu formulieren, fixiert man eine **Standardaufzählung** $p_0, p_1, \dots$ von $\mathbb{Q}$.

- Eine Folge von Rationalzahlen $q_0, q_1, \dots$ heißt **berechenbar** wenn es $q_0 = p_{f(0)}, q_1 = p_{f(1)}, \dots$ für eine berechenbare Funktion f ist. Die heißt **berechenbare Approximation** falls sie zu einer reellen Zahl α konvergiert.
- Eine berechenbare Approximation heißt **Linksapproximation** im Falle $q_0 \leq q_1, \leq \dots,$ **Rechtsapproximation** im Falle $q_0 \geq q_1, \geq \dots$ monoton fallend und **d.c.e.-Approximation** im Falle $|q_1 - q_0| + |q_2 - q_1| + \dots < \infty$.

Im weiteren bezeichnen wir mit $a_0, a_1, \dots$ bzw $b_0, b_1, \dots$ die berechenbaren Approximationen von α bzw β und schreiben $a_0, a_1, \dots \nearrow \alpha$, falls $a_0, a_1, \dots$ eine Linksapproximation von α ist.

Berechenbar approximierbare Zahlen

- Eine reelle Zahl α heißt **berechenbar approximierbar** / **linksberechenbar** / **rechtsberechenbar** / **d.c.e** wenn es eine berechenbare Approximation / Linksapproximation / Rechtsapproximation / d.c.e.-Approximation existiert, die gegen α konvergiert.
- α heißt **berechenbar**, wenn es eine berechenbare Approximation $a_0, a_1, \ldots$ von α existiert, die für jedes n die Ungleichung

$$|\alpha - a_n| < 2^{-n}$$

erfüllt.

Berechenbar approximierbare Zahlen

Die Mengen der berechenbar approximierbaren, linksberechenbaren, rechtsberechenbaren und berechenbaren reellen Zahlen werden mit **CA**, **LEFT-CE**, **RIGHT-CE**, **DCE** und **COMP** bezeichnet.

- Es gilt: $\mathbf{LEFT\text{-}CE} \cap \mathbf{RIGHT\text{-}CE} = \mathbf{COMP}$.
- Eine Zahl $\alpha = 0.A$ ist genau dann berechenbar, wenn ihre Binärdarstellung A eine berechenbare Folge ist.

Martin-Löf-Zufälligkeit

Der Begriff der **Martin-Löf-Zufälligkeit** spielt eine zentrale Rolle in der Theorie der effektiver Zufälligkeit und kann eine gegebene reelle Zahl in drei äquivalenten Weisen als inkomprimierbar, typisch oder unvorhersagbar charakterisieren.
Im Rahmen dieses Vortrags beschäftigen wir uns mit der topologischen Formulierung der Martin-Löf-Zufälligkeit, die auf der Idee eines **Zufälligkeitstestes** (und zwar des Solovay-Testes) basiert ist.

- Ein **Solovay-Test** is eine uniform berechenbare Menge der offenen Intervalle $S_0, S_1, \ldots$, deren Längen eine endliche Summe haben.
- Eine Zahl α ist **Martin-Löf-zufällig** (kurz: **ML-zufällig**), wenn sie in jedem Solovay-Test $S_0, S_1, \ldots$ in höchstens endlich vielen Intervallen S_i enthalten ist.

Martin-Löf-Zufälligkeit: Beispiele in **LEFT-CE**

Beispiel

- Das Chaitinsche Omega Ω ist ein klassisches Beispiel einer ML-zufälligen linksberechenbaren Zahl.
- Die berechenbare Zahl π ist nicht ML-zufällig, weil ihre Binärdarstellung $11.0010010000\ldots$ berechenbar ist, und somit der Solovay-Test $[11.0, 11.1], [11.00, 11, 01], [11.001, 11.010], \ldots$ berechenbar, und enthält π in jedem von seinen Intervallen.
- Für jede Zahl $X = 0.x_0x_1x_2\ldots$ definiert man zwei weitere Zahlen

$$\begin{aligned} r_X &= 0.111\omega_0 111\omega_1 111\omega_2\ldots \\ t_X &= 0.1\omega_0 1\omega_1 1\omega_2\ldots \end{aligned}$$

  Falls X Martin-Löf-zufällig ist, sind r_X und s_X beide nicht-berechenbar und nicht ML-zufällig, obwohl t_X intuitiv "mehr zufällig als r_X" scheint.

Wie lässt sich eine intuitive Relation

"eine Zahl ist nicht mehr zufällig als eine andere"

formalisieren?

Solovay-Reduzierbarkeit

Definition (Solovay, 1975)

Eine reelle Zahl α ist **Solovay-reduzierbar** auf eine reelle Zahl β (Notation: $\alpha \leq_{\mathrm{S}} \beta$), wenn es eine Konstante $c > 0$ und eine partiell berechenbare Übersetzungsfunktion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ existiert, so dass g für alle $q < \beta$ definiert ist und die Ungleichung

$$0 < \frac{\alpha - g(q)}{\beta - q} < c$$

erfüllt.

Beispiel

für jedes X gilt $r_X \leq_S t_X$ via eine Übersetzungsfunktion g, die wie folgt definiert ist:

$$g(0.1\omega_1 1\omega_1 1\omega_2 \dots) = 0.111\omega_0 111\omega_1 111\omega_2 \dots$$

für Rationalzahlen von der Form $0.111\omega_0 111\omega_1, \dots$ und

$$g(0.1\omega_0 \dots 1\omega_n 0 \dots) = 0.111\omega_0 \dots 111\omega_n 111$$

für alle anderen Rationalzahlen.

Solovay-Reduzierbarkeit: Eigenschaften

- $\leq_S$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.
- Auf **LEFT-CE** ist **COMP** bzgl $\leq_S$ nach unten abgeschlossen
- Nach bekanntem Resultat von Calude et al. (2001), das ein gemeinsames Werk mehrerer Autoren abschließt, bilden die Martin-Löf-zufälligen linksberechenbare Zahlen bzgl $\leq_S$ einen höchsten Grad von **LEFT-CE**.
- Außerhalb von **LEFT-CE** wird die Solovay-Reduzierbarkeit von manchen Autoren als "badly behaved" charakterisiert.

Monotone Solovay-Reduzierbarkeit

Definition (Merkle, Titov, 2021)

Eine reelle Zahl α ist **monoton Solovay-reduzierbar** auf eine reelle Zahl β (Notation: $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m} \beta$), , wenn es eine Konstante $c > 0$ und eine monoton wachsende partiell berechenbare Funktion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ existiert, so dass g für alle $q < \beta$ definiert ist und die Ungleichung

$$0 < \frac{\alpha - g(q)}{\beta - q} < c$$

erfüllt.

- $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$,
- $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m} \beta \implies \alpha \leq_{\mathrm{S}} \beta$,
- auf **LEFT-CE**: $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m} \beta \iff \alpha \leq_{\mathrm{S}} \beta$,
- für jedes X gilt $r_X \leq_{\mathrm{S}}^{m} t_X$, denn die Übersetzungsfunktion g aus dem letzten Beweis ist monoton.

$\leq_S$ und $\leq_S^m$: Abschlußeigenschaften

Eigenschaft	$\leq_S$	$\leq_S^m$
Abgeschlossenheit nach unten	**COMP** in **LEFT-CE** **LEFT-CE** in $\mathbb{R}$ **DCE** in **CA**	**COMP** in $\mathbb{R}$ **LEFT-CE** in $\mathbb{R}$ **RIGHT-CE** in $\mathbb{R}$ **DCE** in $\mathbb{R}$ **CA** in $\mathbb{R}$
unterer Grad	**COMP** in **LEFT-CE**	**COMP** in **LEFT-CE**
Abg. nach oben	ML-zufällige in $\mathbb{R}$	ML-zufällige in $\mathbb{R}$
oberer Grad	ML-zufällige in **LEFT-CE**	

Ausgangspunkt

Satz (Barmpalias, Lewis-Pye, 2017)

Seien α, β linksberechenbar und β ML-zufällig. Dann existiert es eine solche Konstante $d \geq 0$, dass es für je zwei Linksapproximationen $a_0, a_1, \cdots \nearrow \alpha$ und $b_0, b_1, \cdots \nearrow \beta$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - a_n}{\beta - b_n} = d \tag{1}$$

gilt.

Der Satz von Barmpalias und Lewis-Pye ist eine unerwartete Verschärfung des Resultats von Calude et al. (2001), aus dem nur folgt, dass die Quotientenfolge in (3) nach oben beschränkt ist.

Ausgangspunkt

Im Rücksicht auf den Solovay-Reduzierbarkeitsbegriff kann dieser Satz wie folgt umformuliert werden:

Satz (Barmpalias, Lewis-Pye, 2017, "rationale Form")

Seien α, β linksberechenbar und β ML-zufällig. Dann existiert es eine solche Konstante $d \geq 0$, dass es für jede ***monotone*** *Übersetzungsfunktion g, so dass $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m} \beta$ via g ist,*

$$\exists \lim_{q \nearrow \beta} \frac{\alpha - g(q)}{\beta - q} = d. \tag{2}$$

gilt (die Notation $\lim\limits_{q \nearrow \beta}$ bedeutet den linksseitigen Grenzwert von β).

- Für dasselbe Paar α und β stimmen die Konstanten d aus beiden Versionen des Satzes überein.
- Die Anforderung zu g, monoton zu sein, kann nicht vernachlässigt werden.

Das Hauptergebnis

Satz (Titov, 2023)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *so dass* $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m} \beta$ *gilt* β *ML-zufällig ist. Dann existiert es eine solche Konstante* $d \geq 0$*, dass es für jede monotone Übersetzungsfunktion* g*, so dass* $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m} \beta$ *via* g *ist,*

$$\exists \lim_{q \nearrow \beta} \frac{\alpha - g(q)}{\beta - q} = d. \tag{3}$$

gilt.

LEFT-CE-Fall: Beweisidee (Miller, 2017)

Annahme: es gibt $a_0, a_1, \cdots \nearrow \alpha$ und $b_0, b_1, \cdots \nearrow \beta$ sowie $c < d$ in $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$(\exists^\infty n : \frac{\alpha - a_n}{\beta - b_n} < c) \wedge (\exists^\infty n : \frac{\alpha - a_n}{\beta - b_n} > d).$$

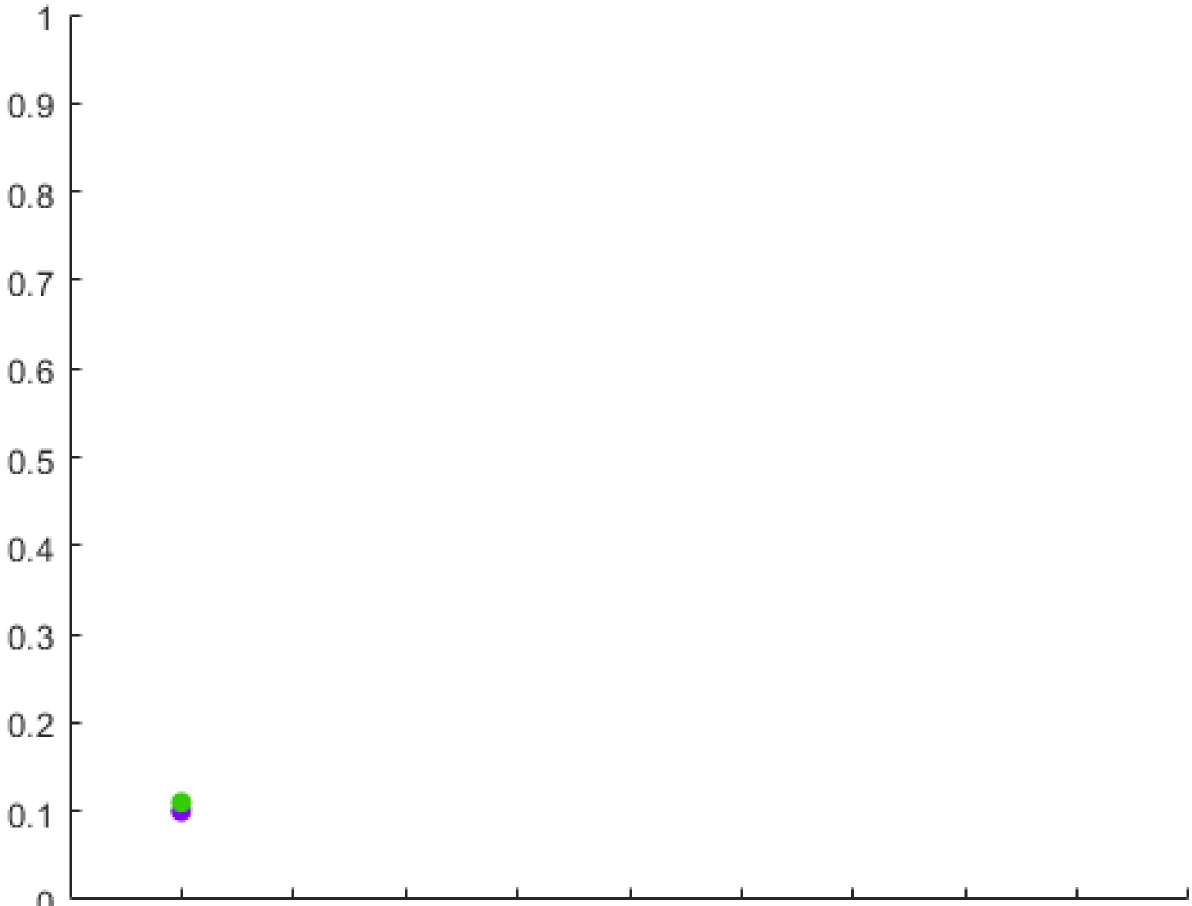
Ziel: Konstruktion eines Solovay-Testes S, der unendlich oft $(d-c)\beta$ überdeckt, was der ML-Zufälligkeit von β widerspricht.

Idee: $Test(\{b_0\}) \subseteq Test(\{b_0, b_1\}) \subseteq Test(\{b_0, b_1, b_2\}) \subseteq \cdots \rightarrow S$ mit den folgenden Eigenschaften:

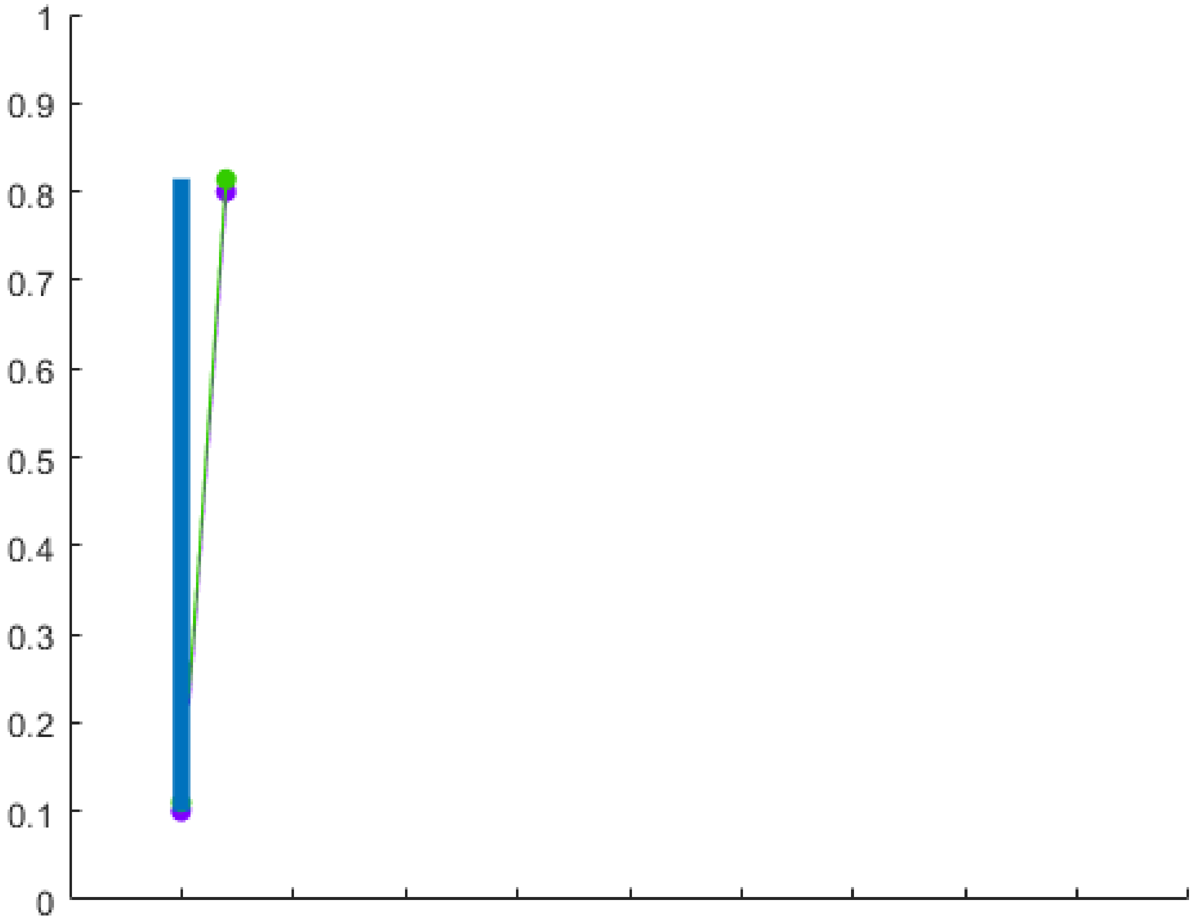
- $Test(\{b_0, \ldots, b_i\}) \subseteq Test(\{b_0, \ldots, b_{i+1}\})$ für jedes i,
- $\exists C \forall i$: $\mu\big(Test(\{b_0, \ldots, b_i\})\big) < C$,
- Für die Funktion $k_A(r)$, die für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Überdeckungen von r durch den Test A zurückgibt, gilt:

$$k_{Test(b_0,\ldots,b_i)}((d-c)\beta) \underset{i\to\infty}{\rightarrow} \infty.$$

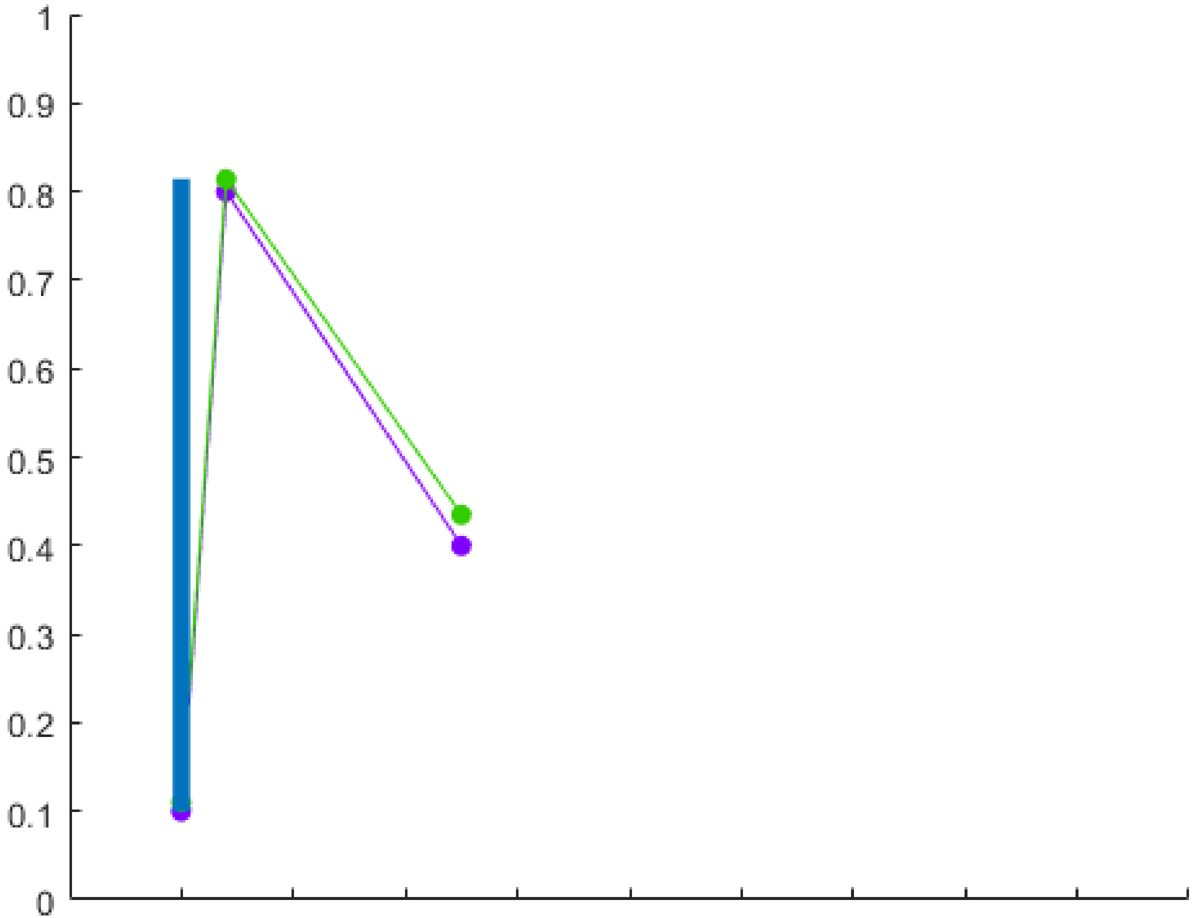
LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



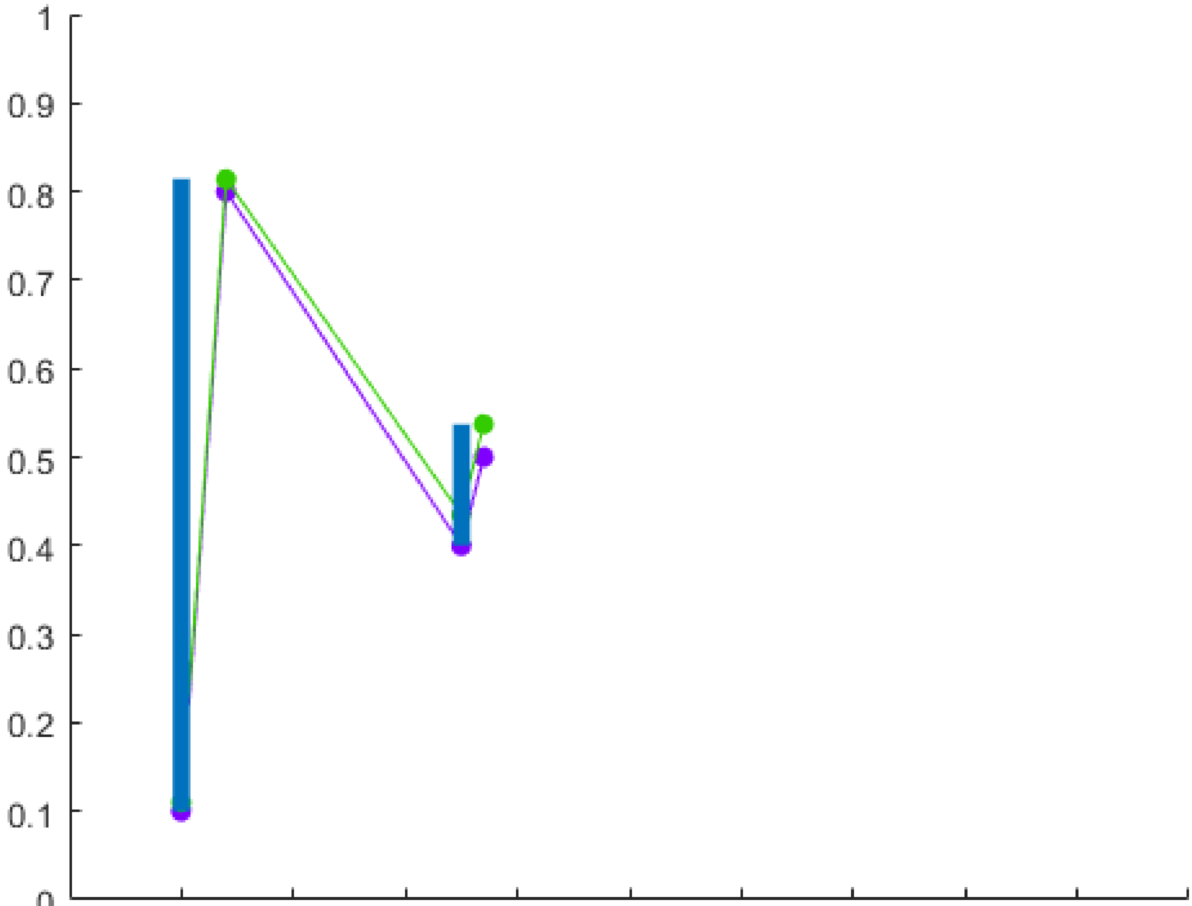
LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



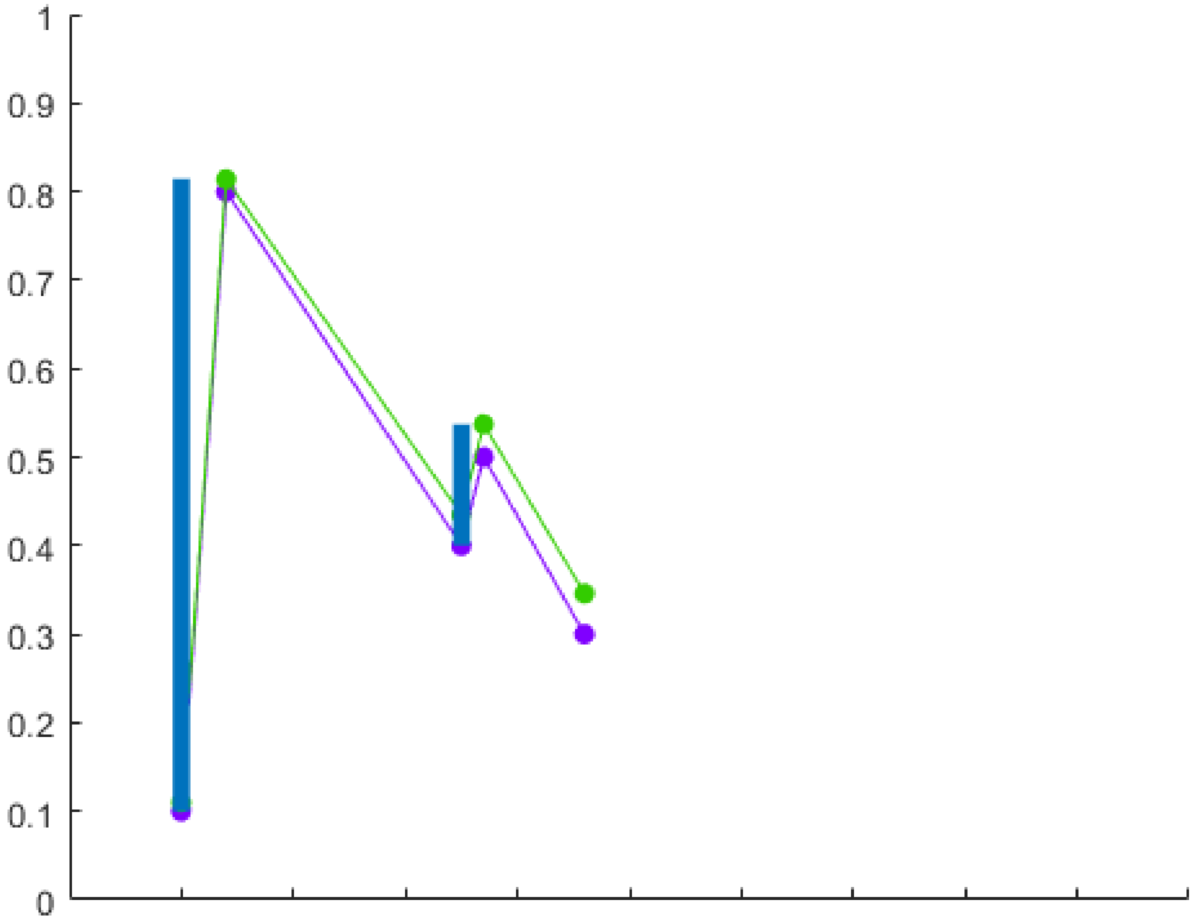
LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



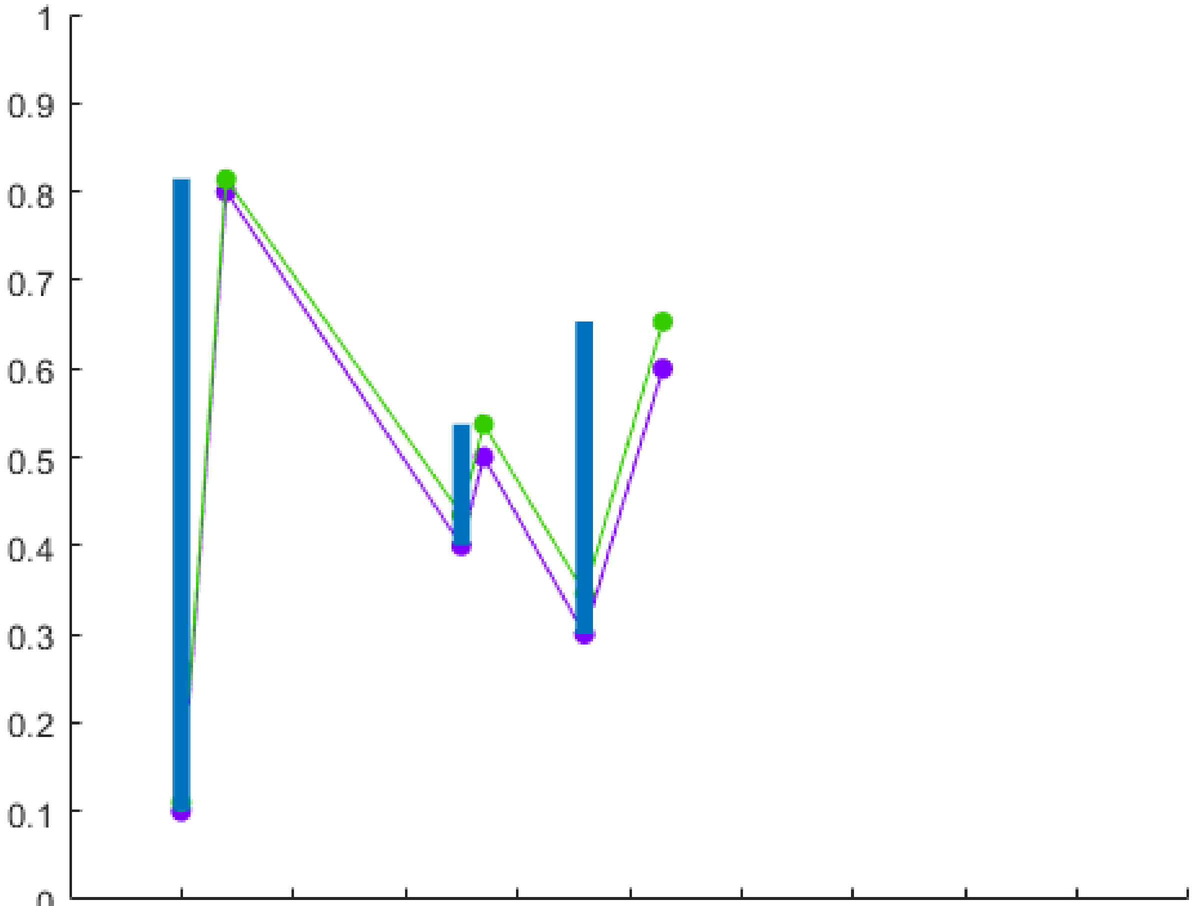
LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



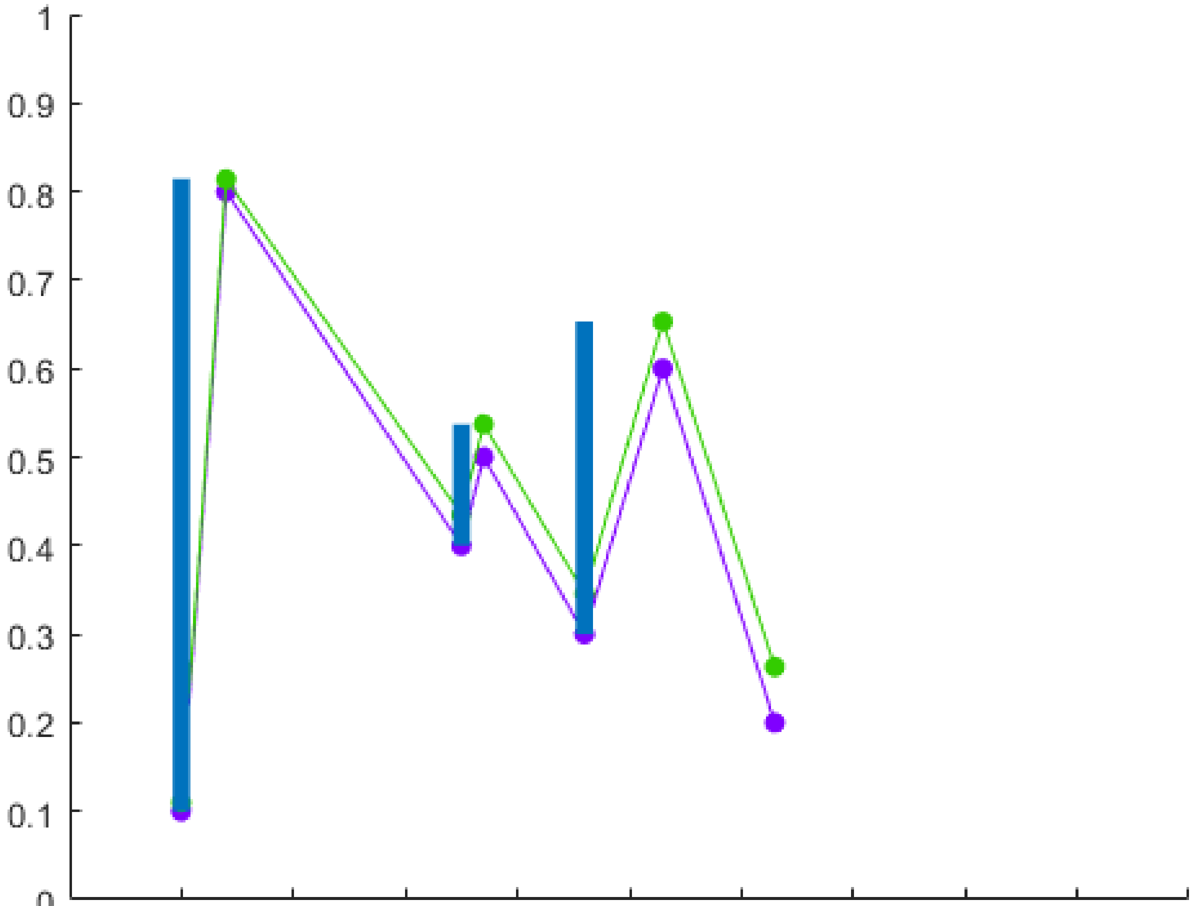
LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



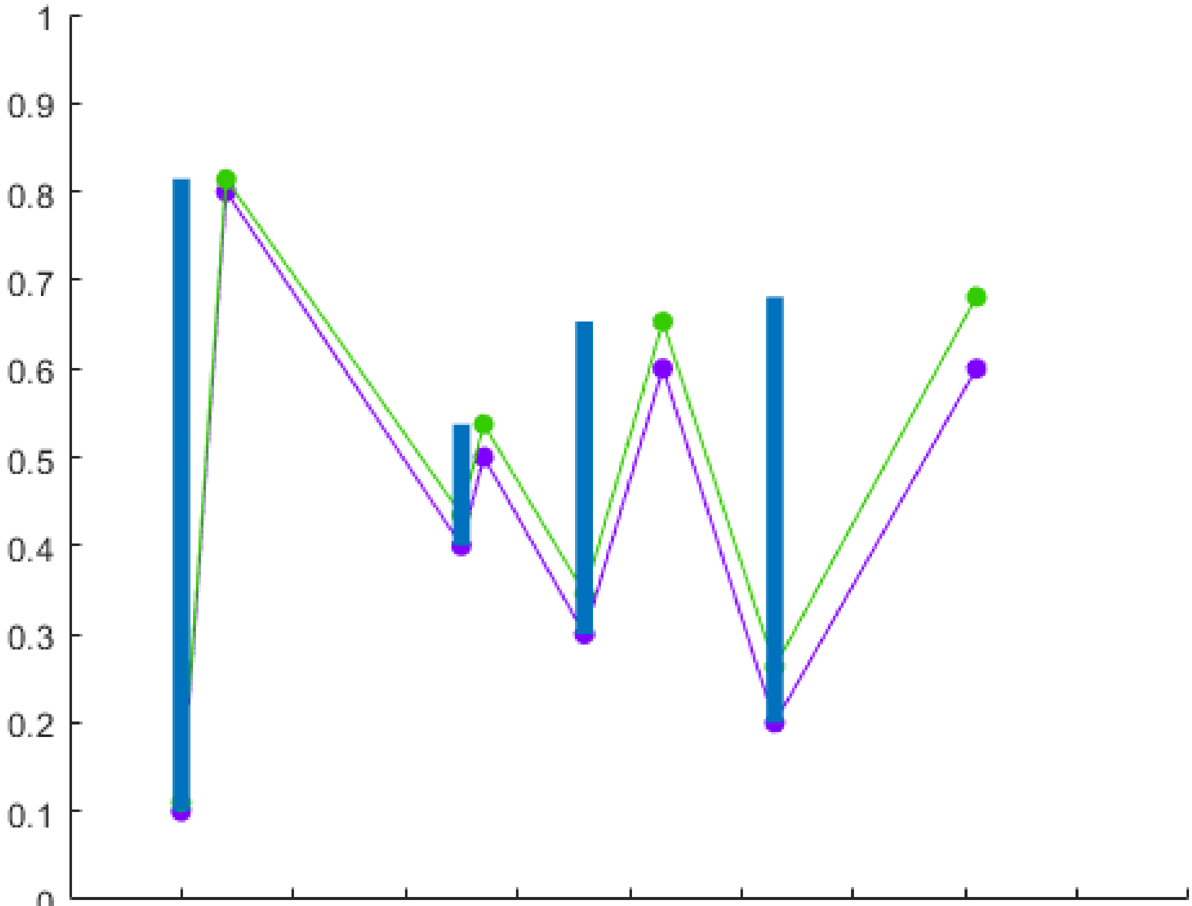
LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



LEFT-CE-Fall: Testkonstruktion



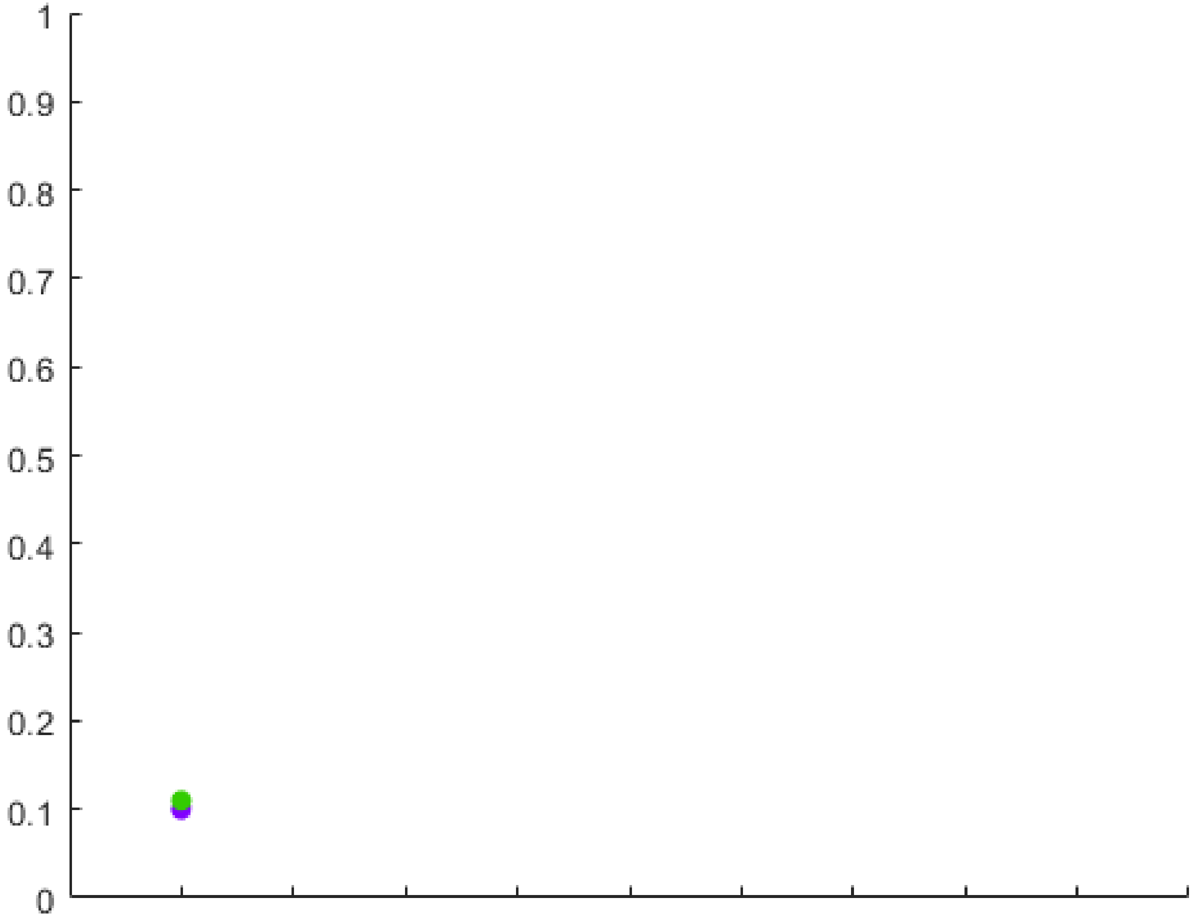
Allgemeiner Fall: Problematik

Annahme: es gibt eine monotone Übersetzungsfunktion g sowie $c < d$ in $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

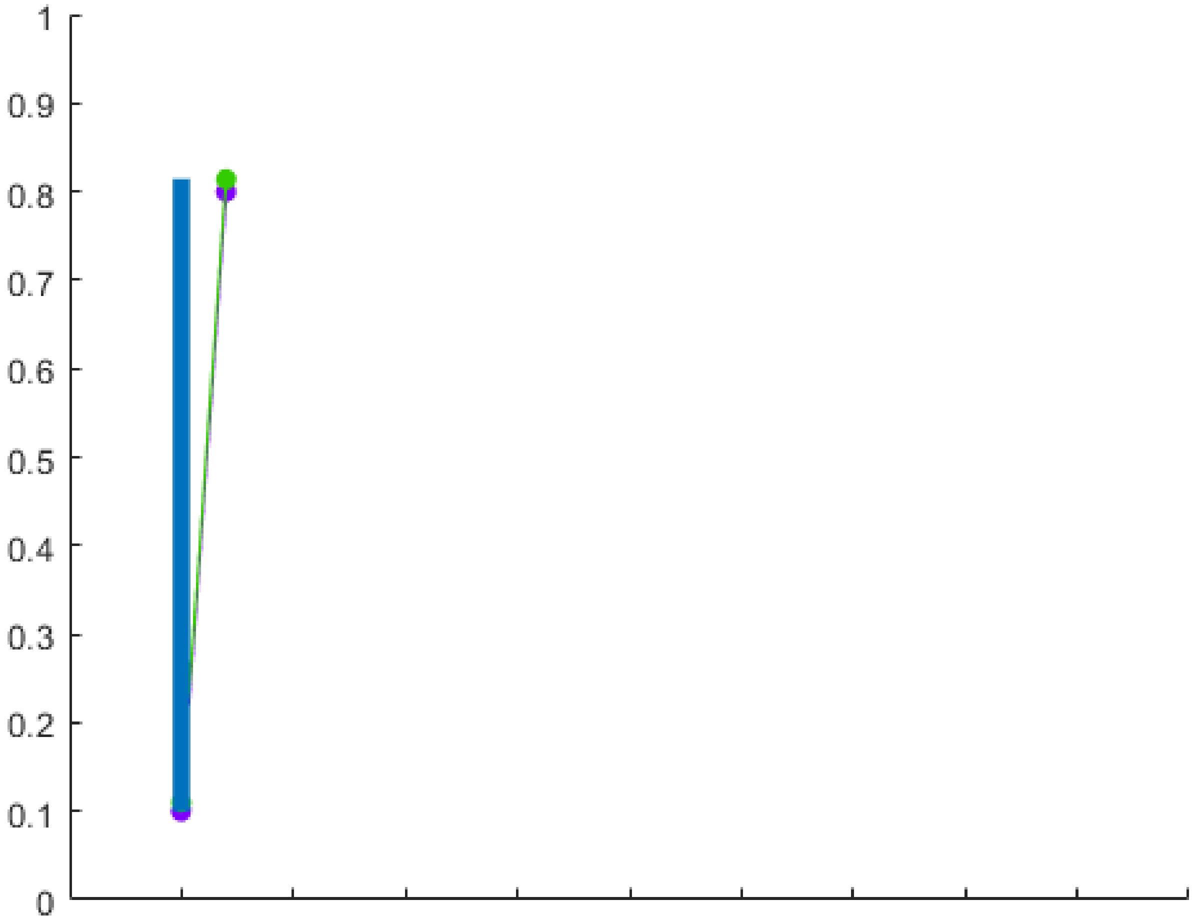
$$(\exists^\infty n : \frac{\alpha - g(q_n)}{\beta - q_n} < c) \wedge (\exists^\infty n : \frac{\alpha - g(q_n)}{\beta - q_n} > d).$$

Sei weiter $q_0, q_1, \ldots$ eine nicht-monotone Aufzählung des Definitionsbereichs von g.

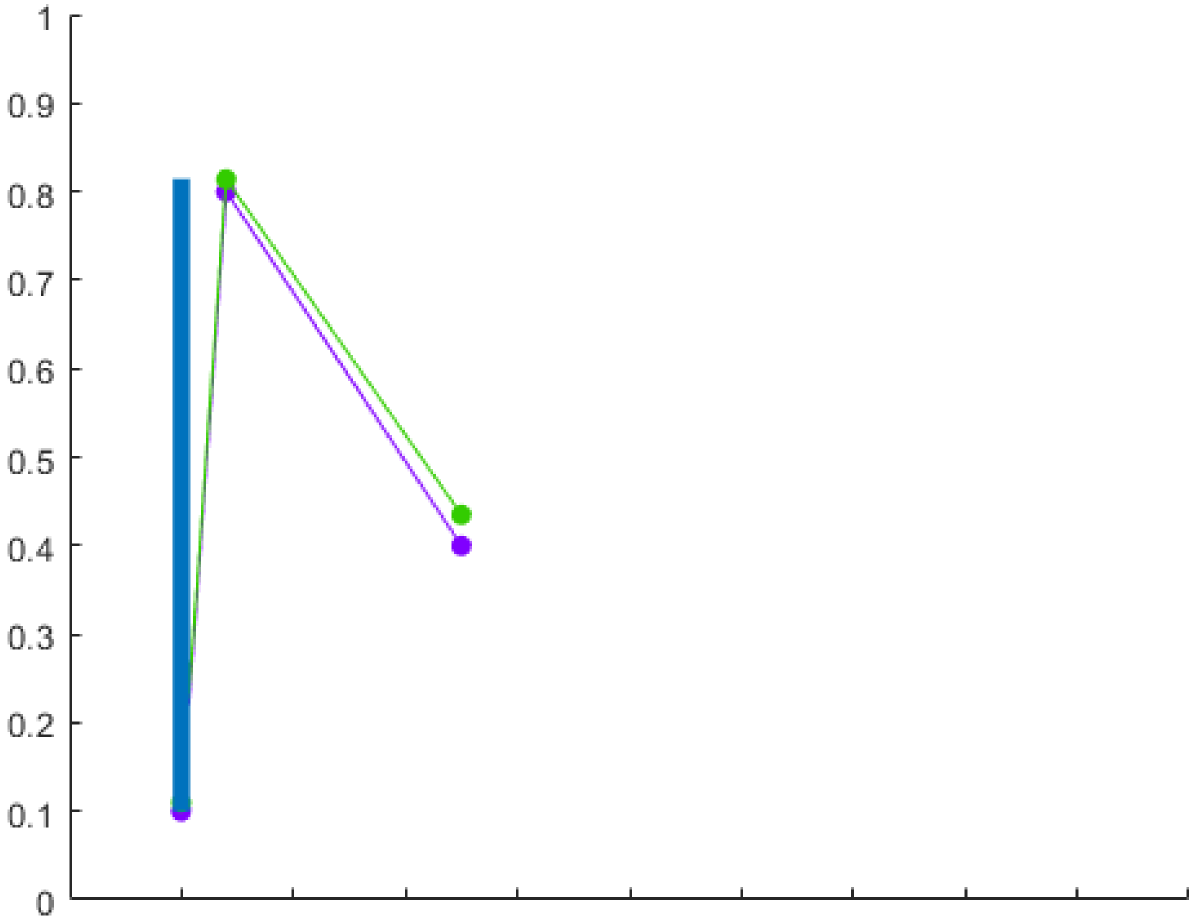
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



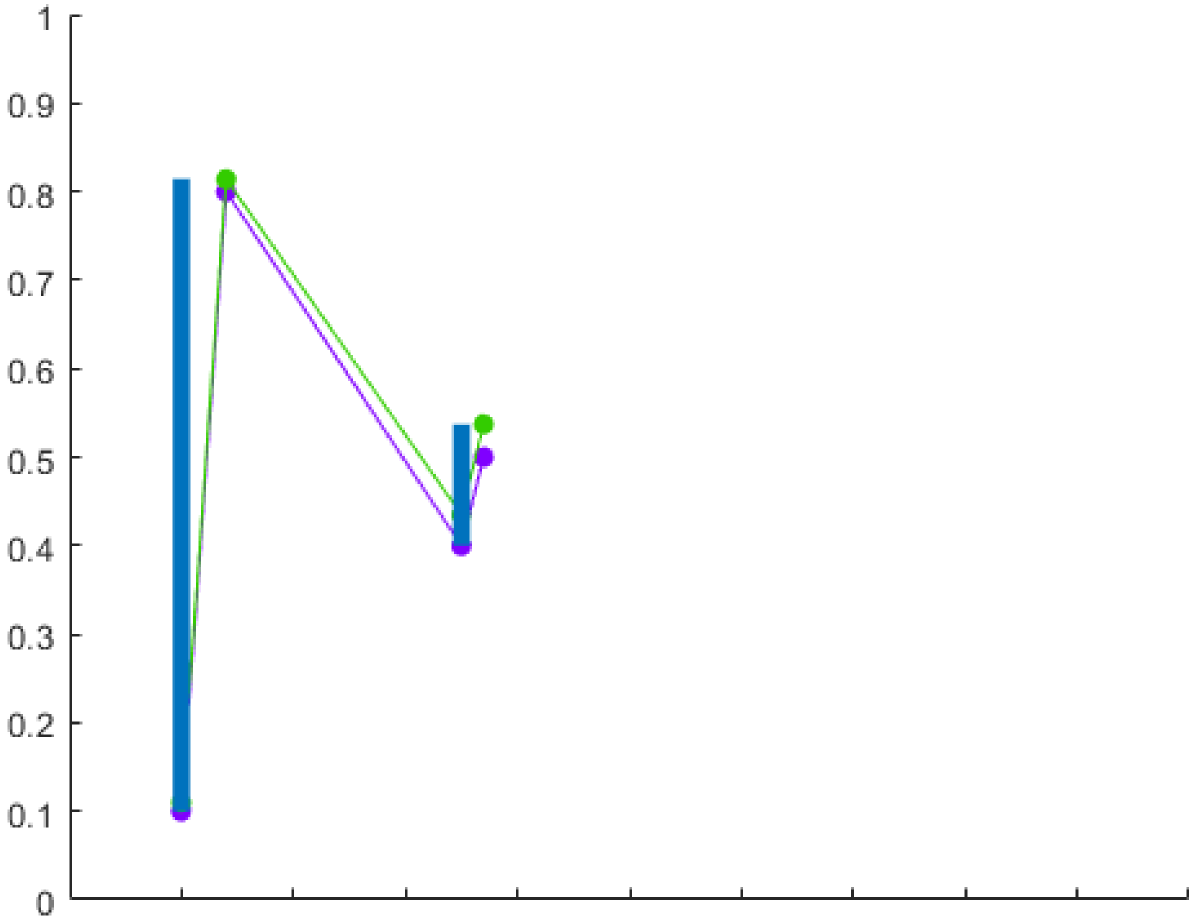
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



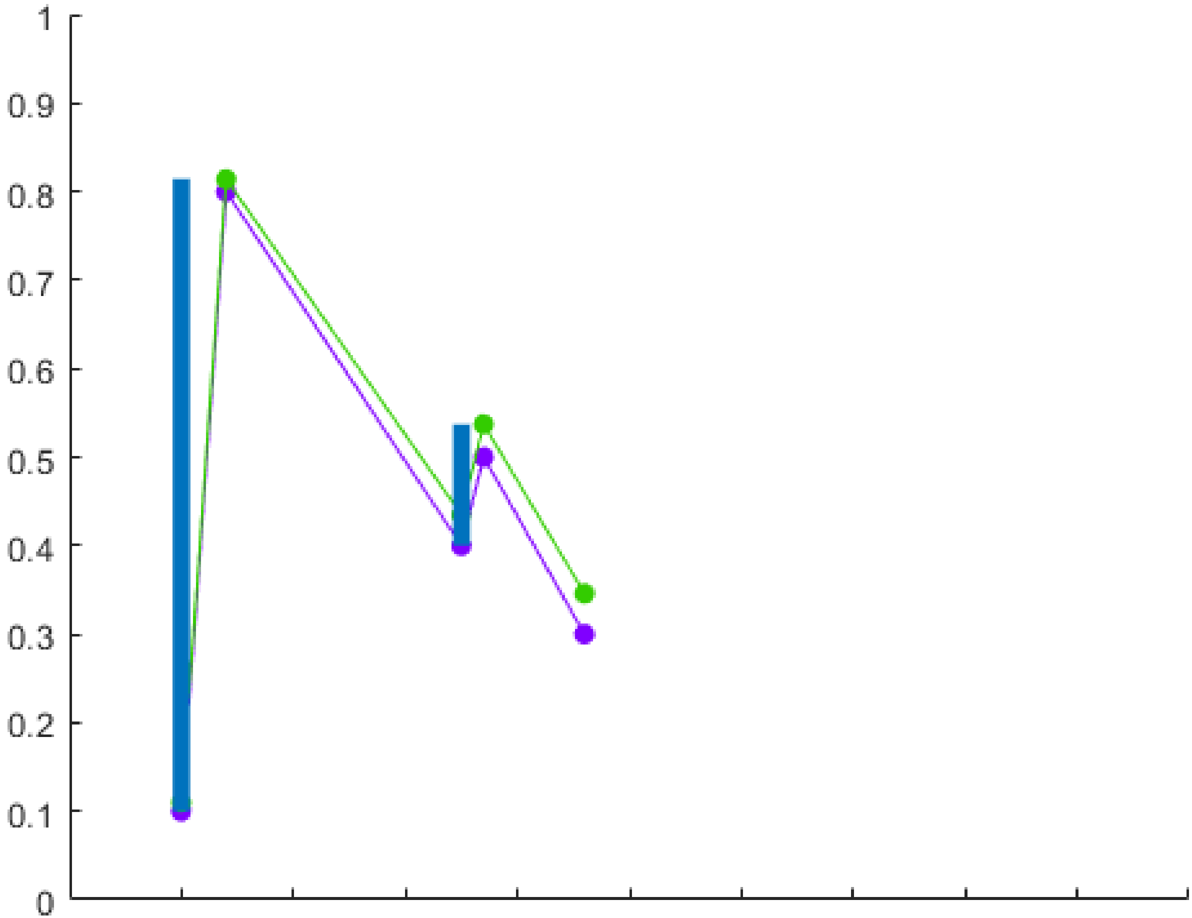
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



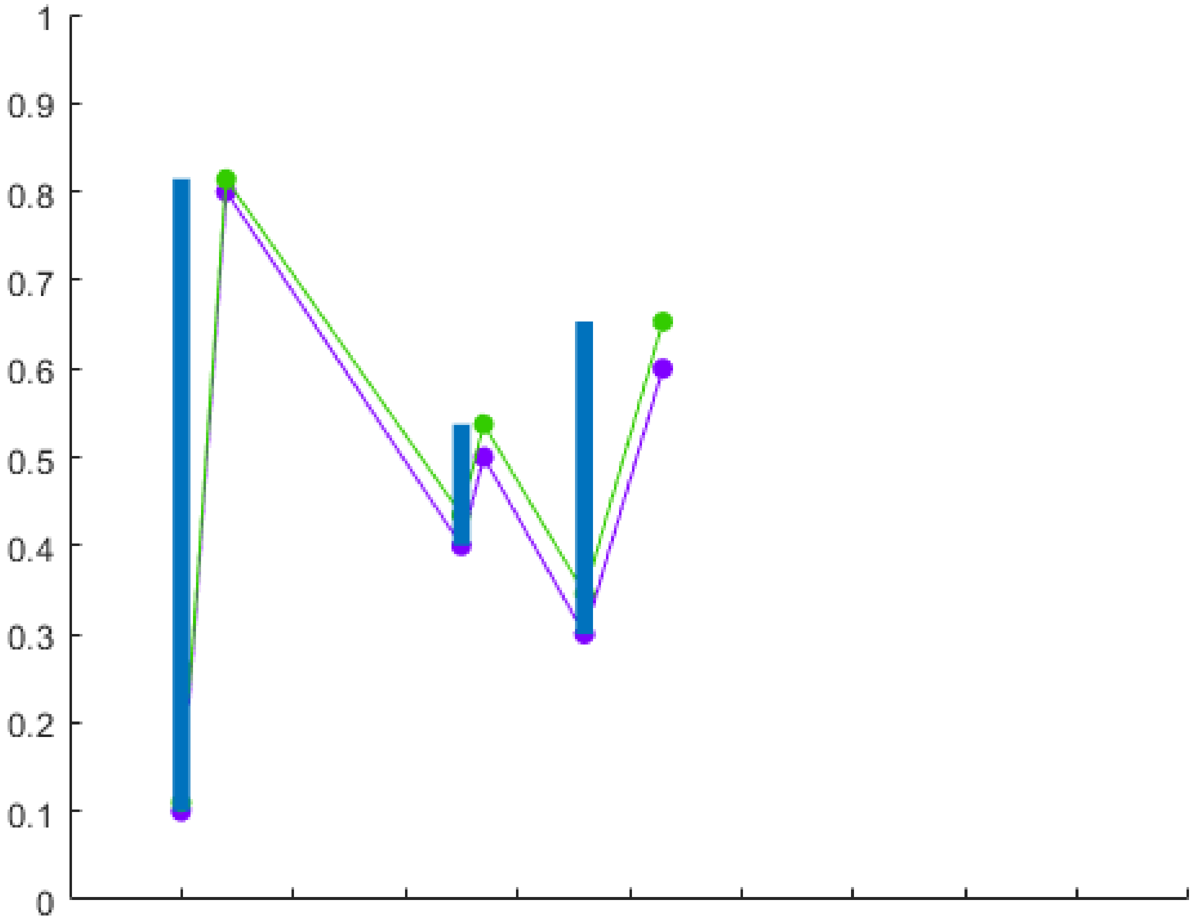
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



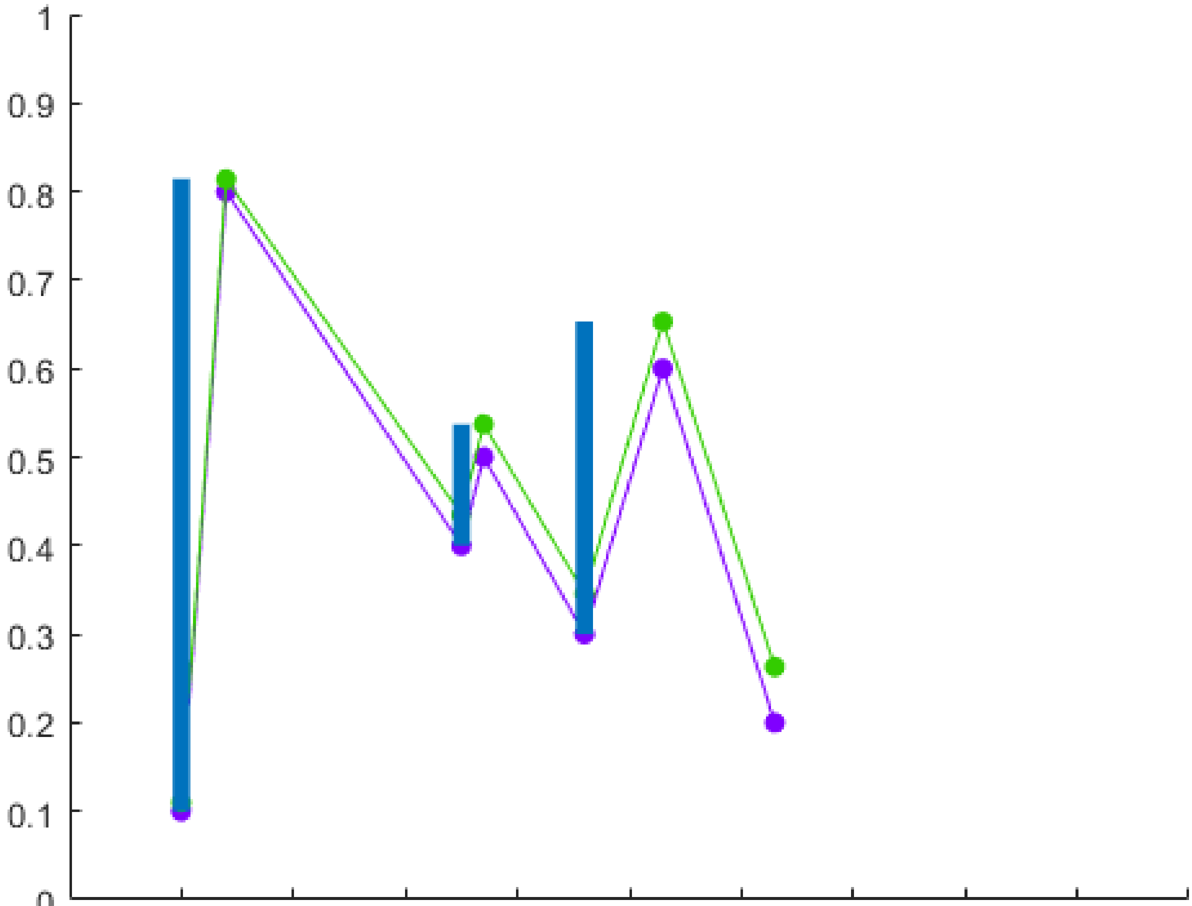
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



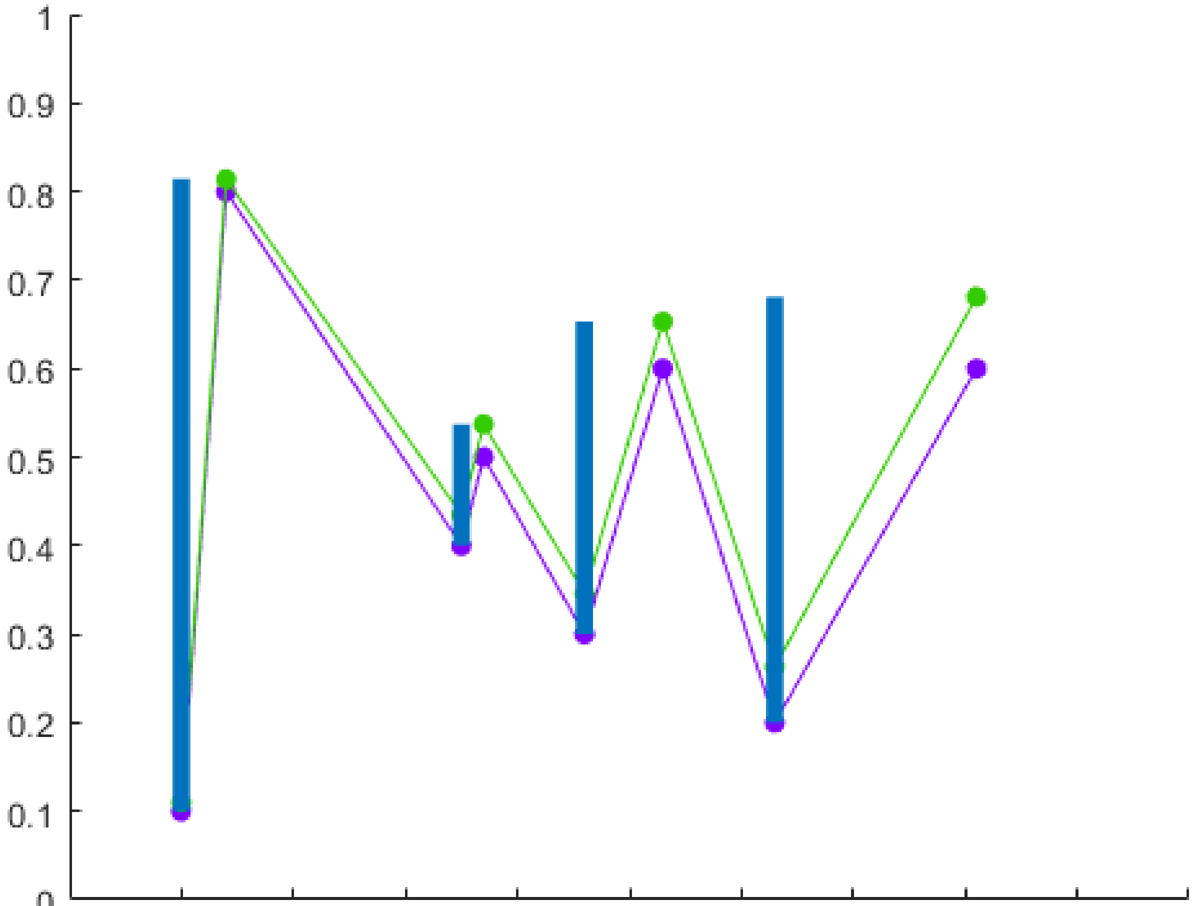
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



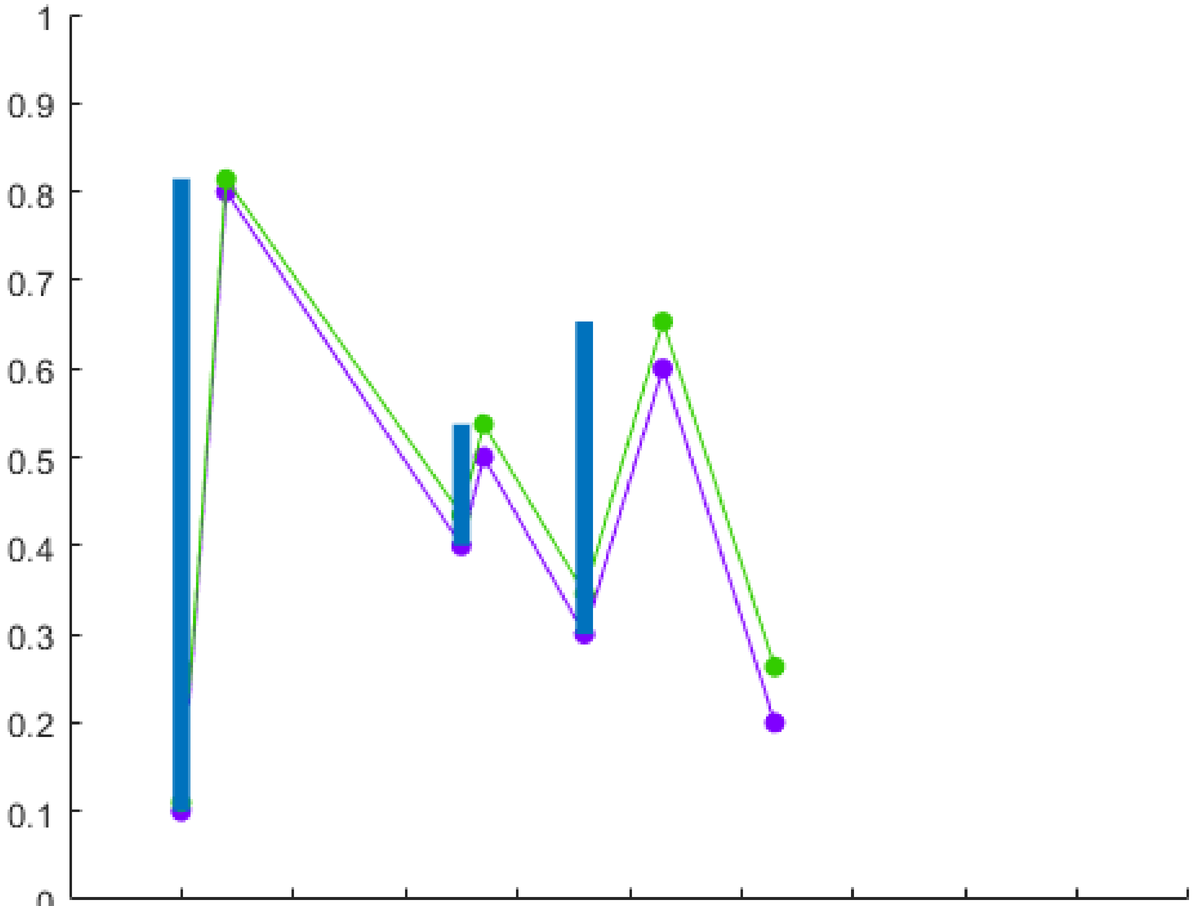
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



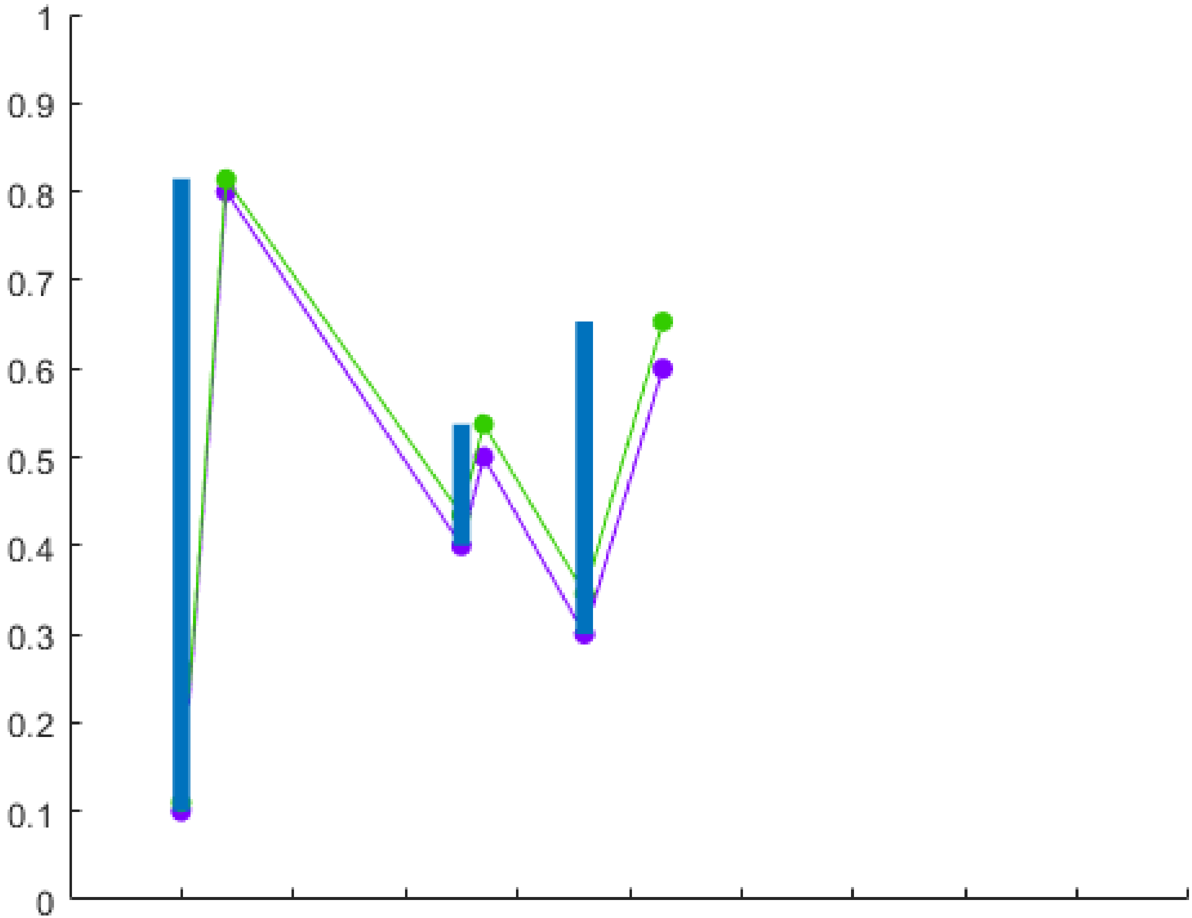
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



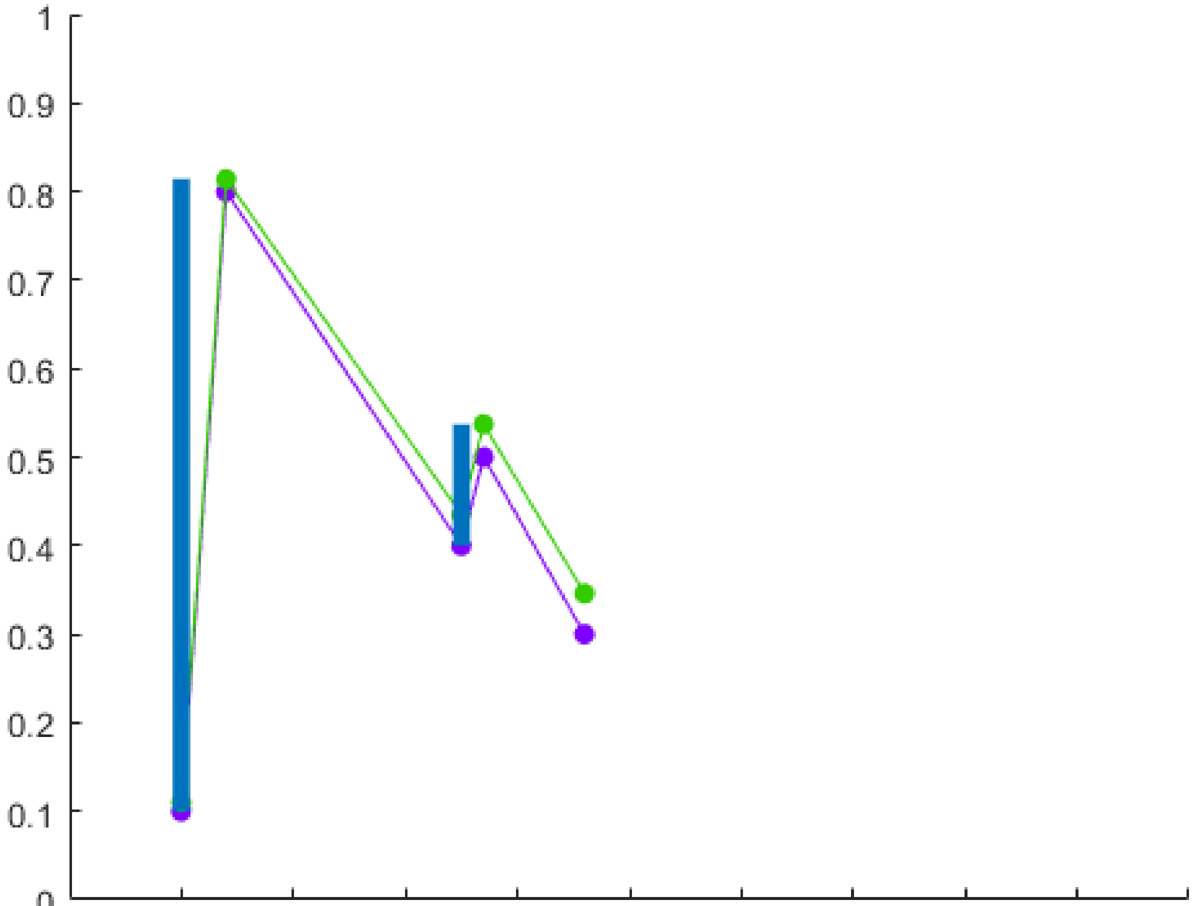
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



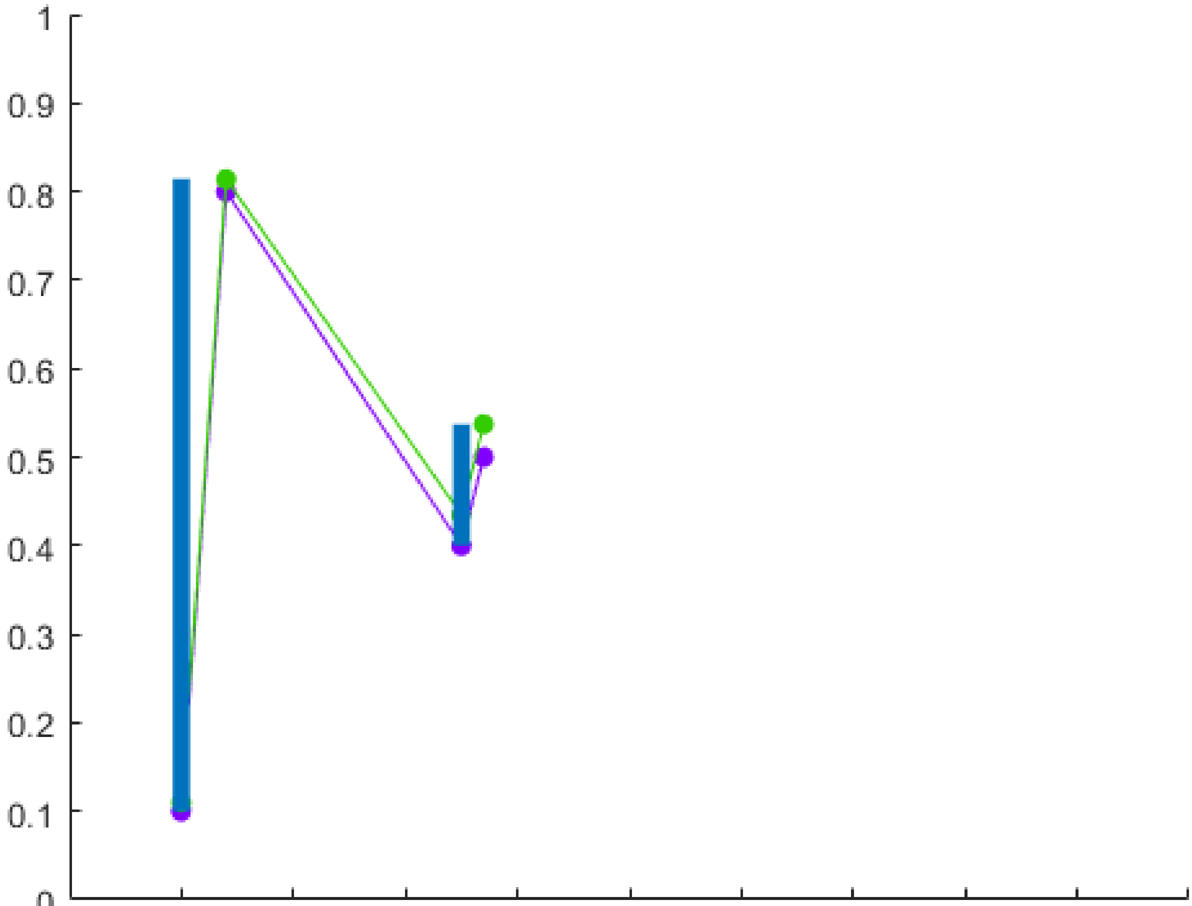
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



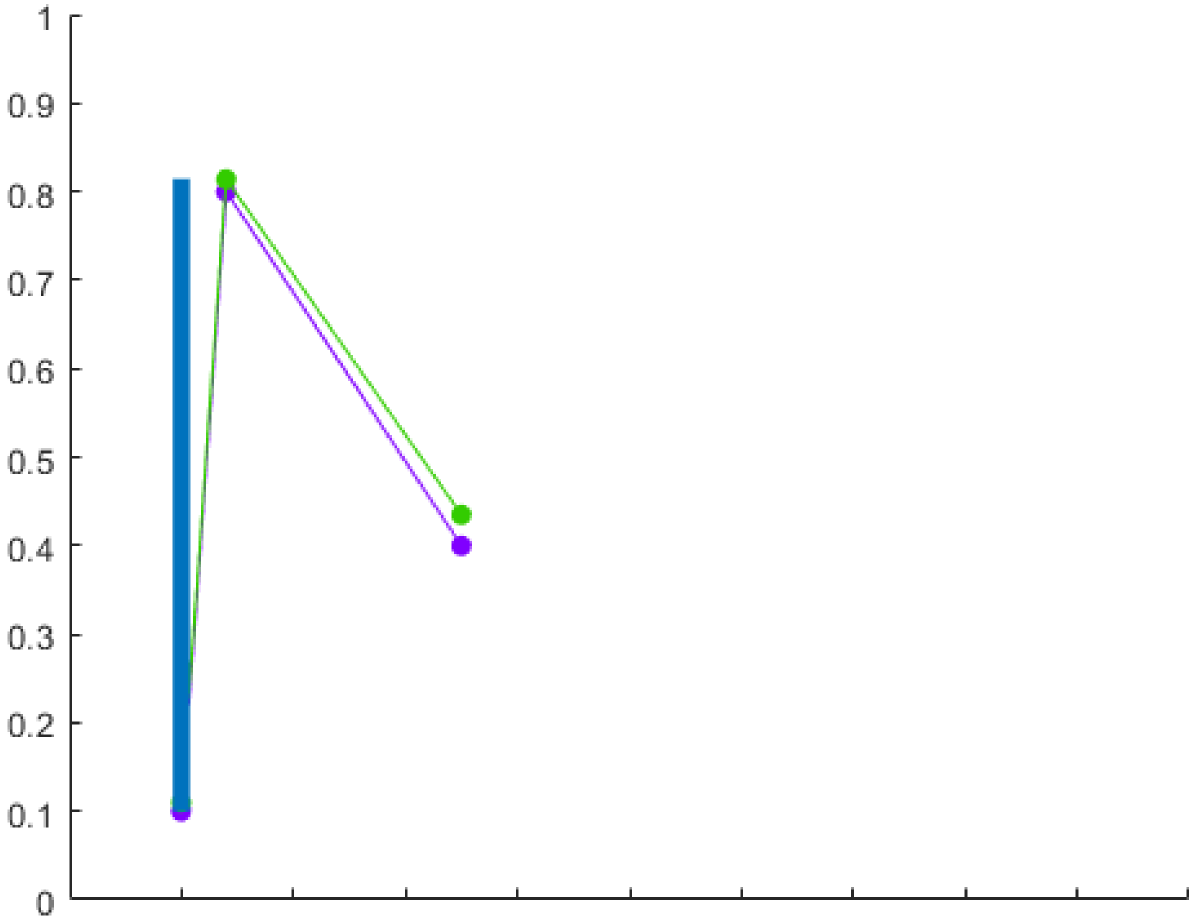
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



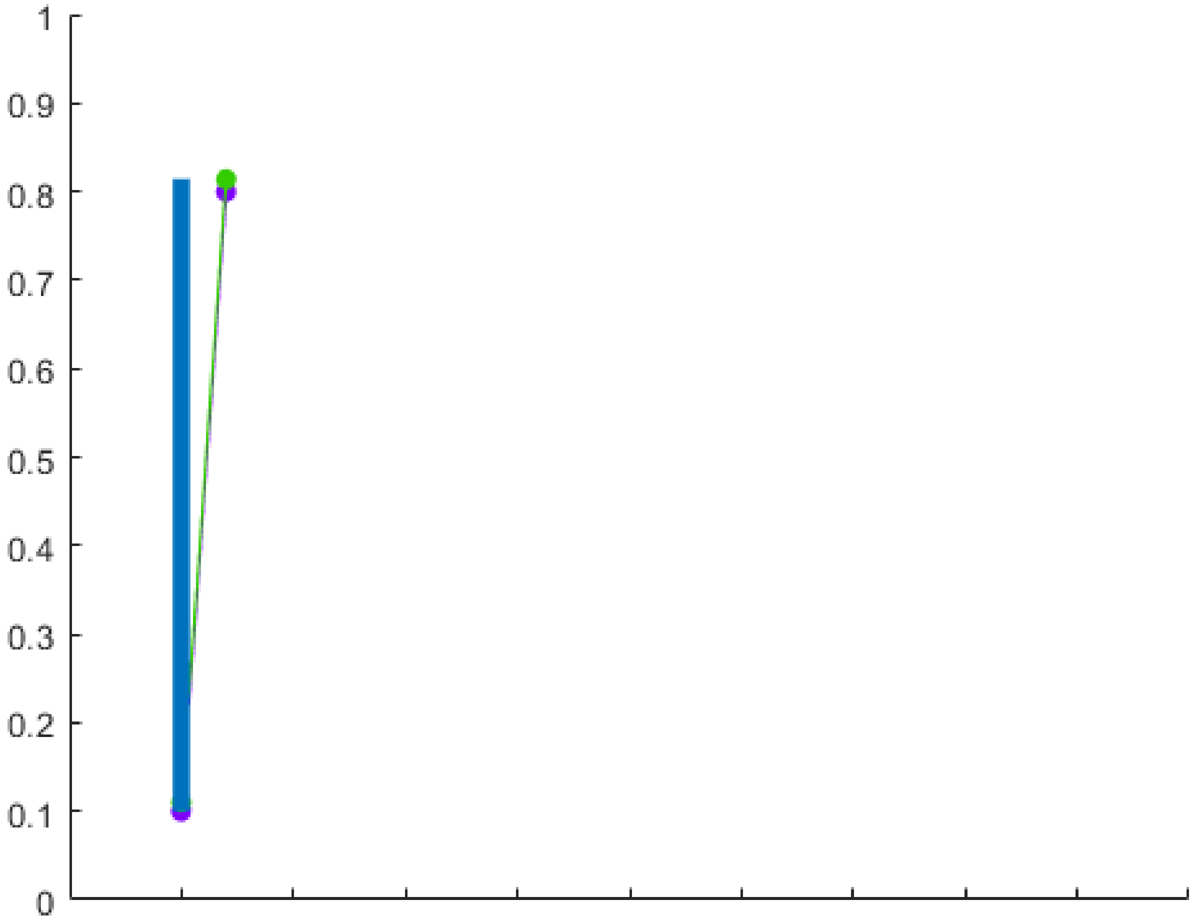
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



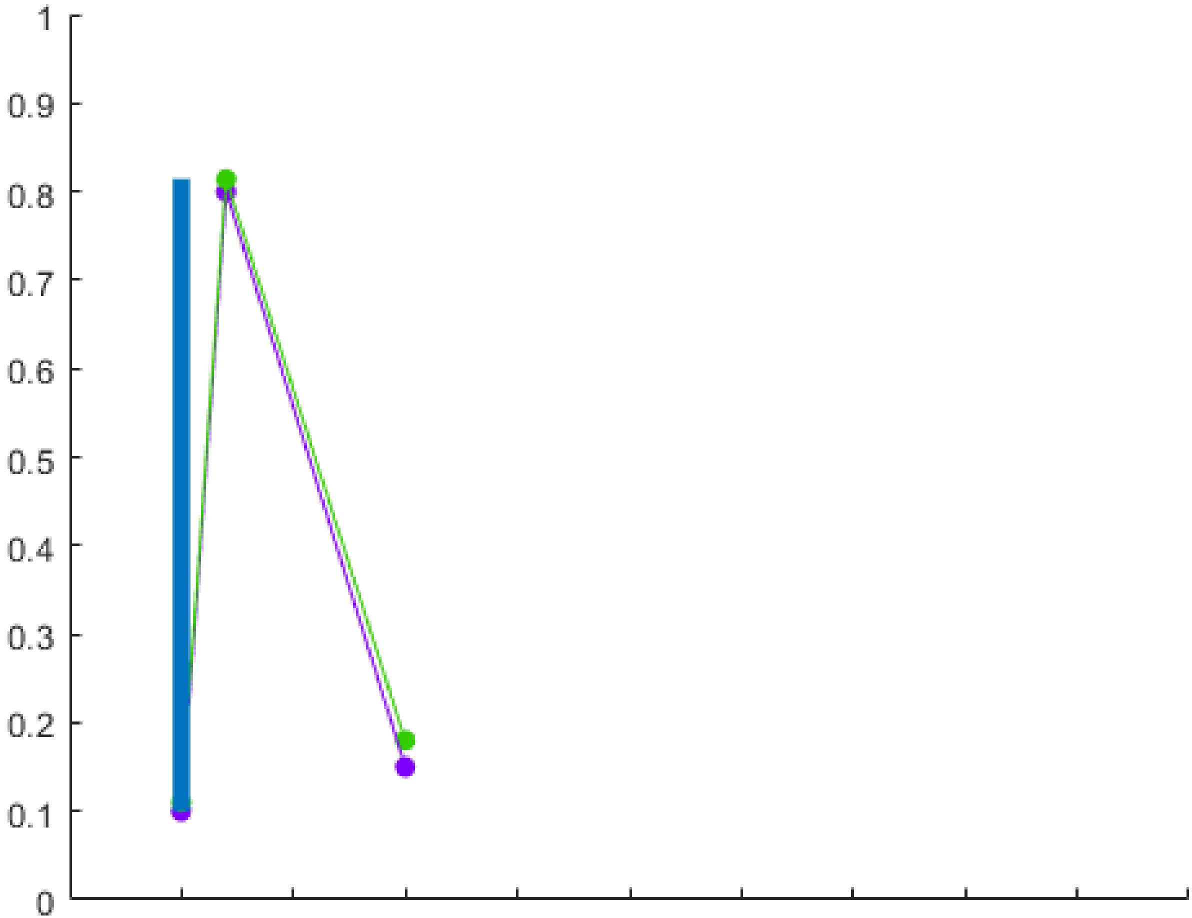
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



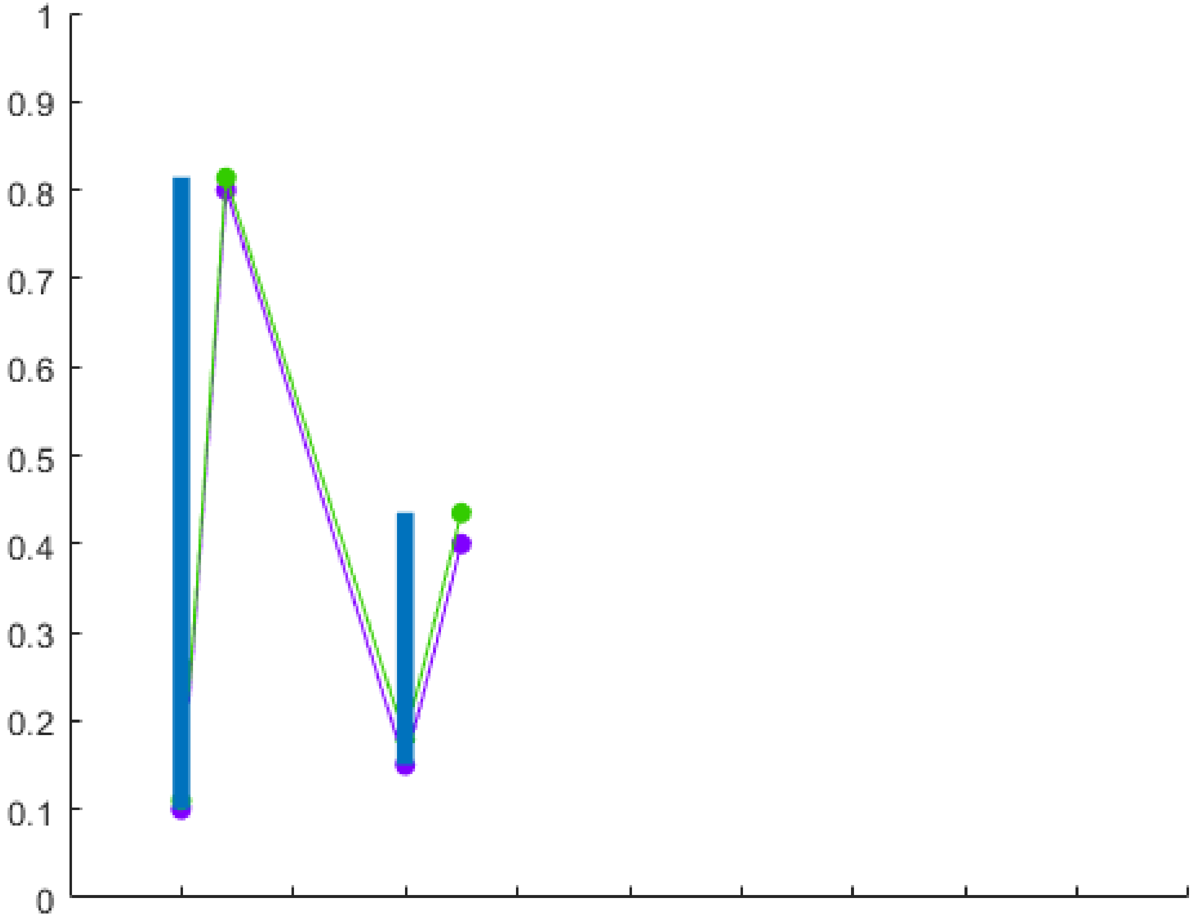
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



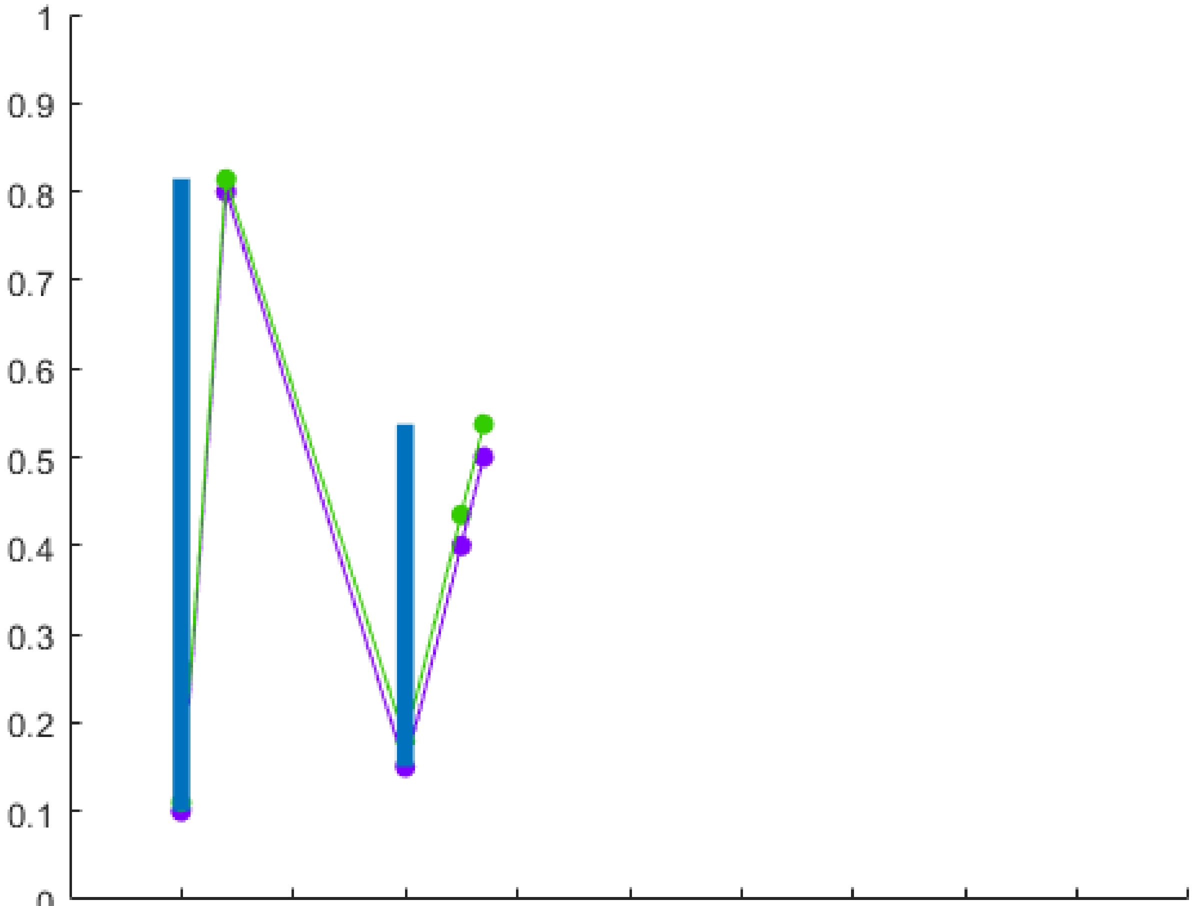
nicht-**LEFT-CE**-Fall: ein neuer Punkt b_{i+1}



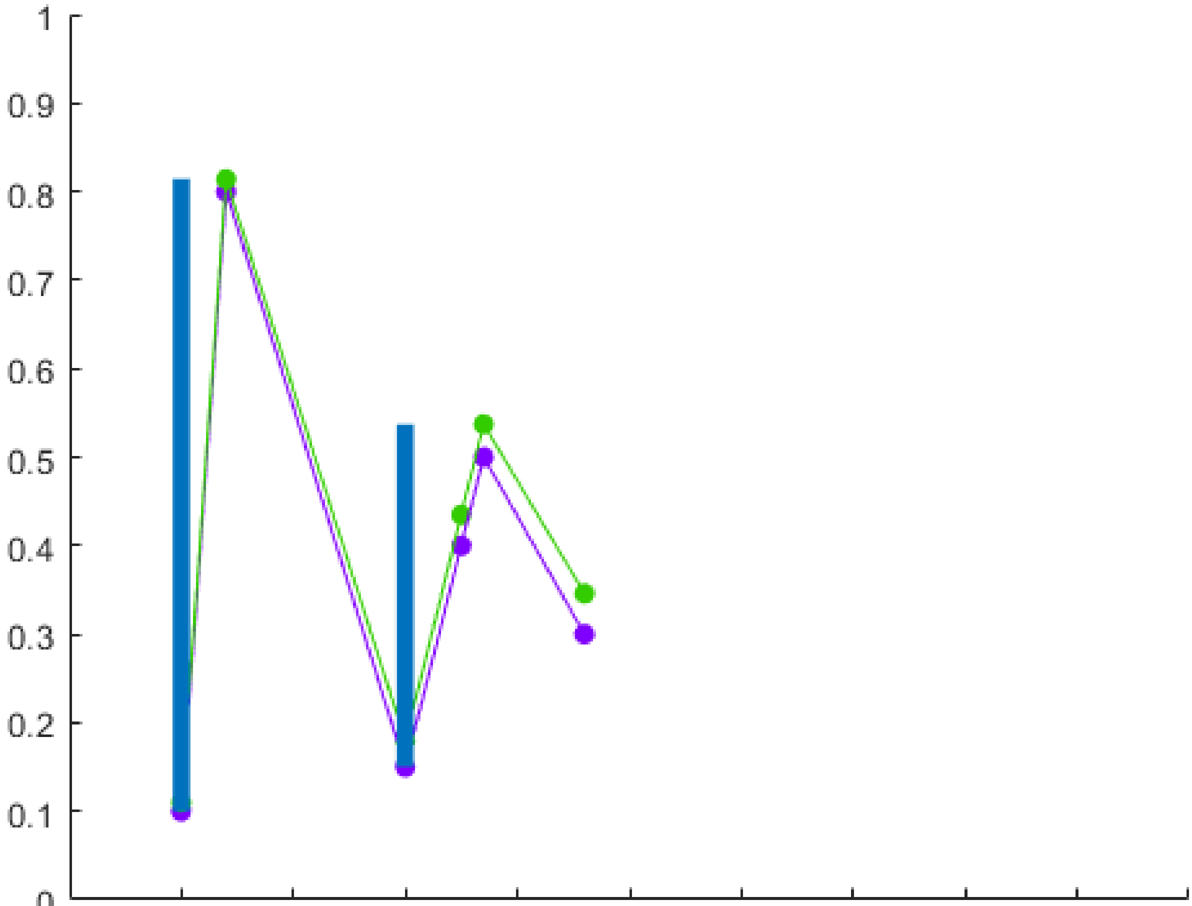
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



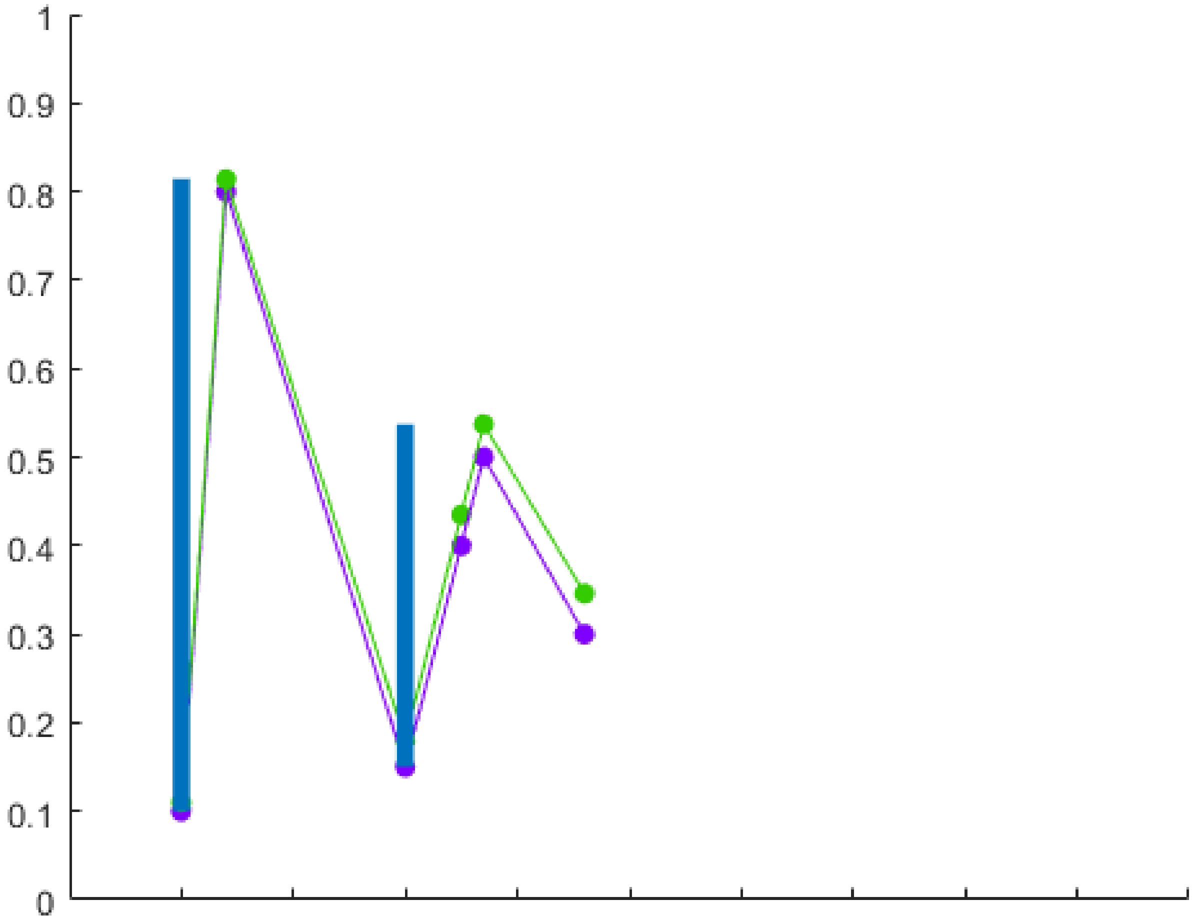
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



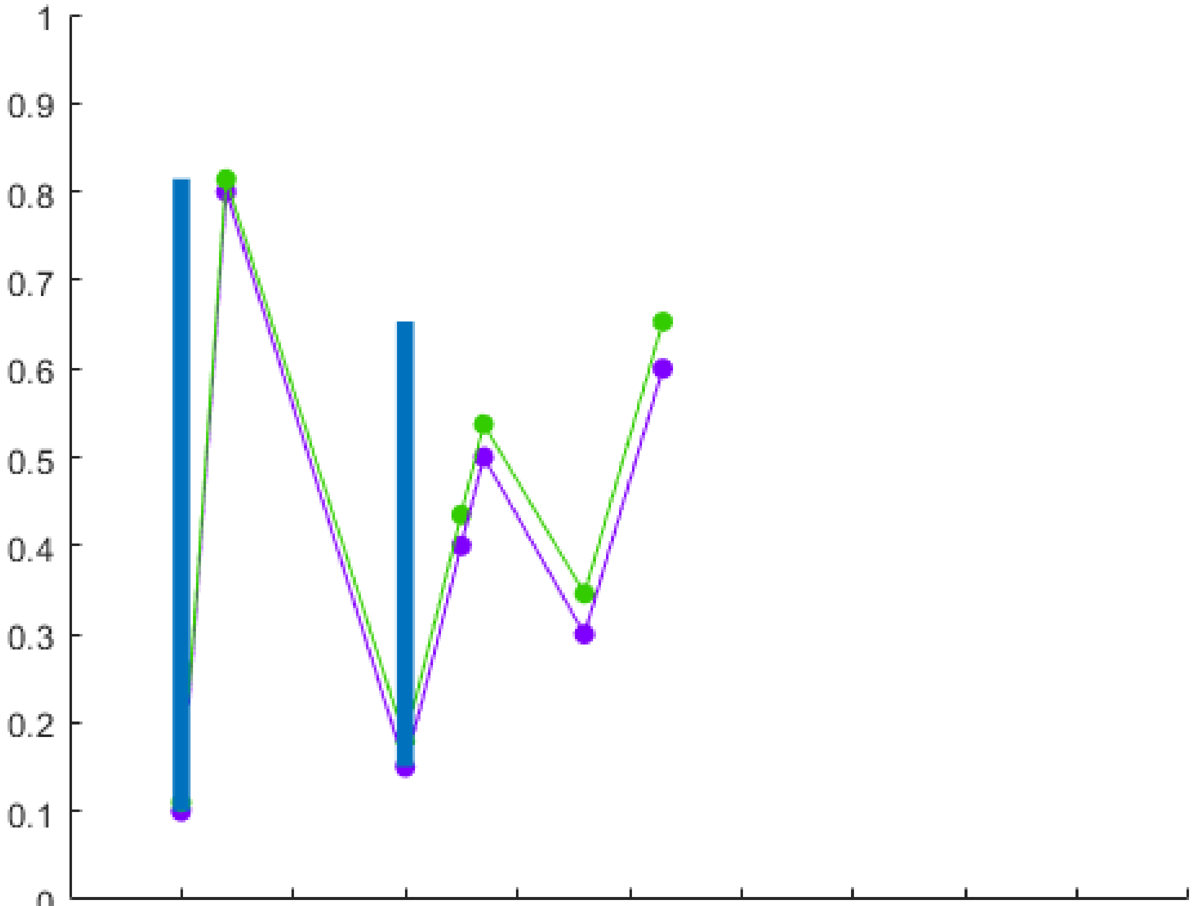
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



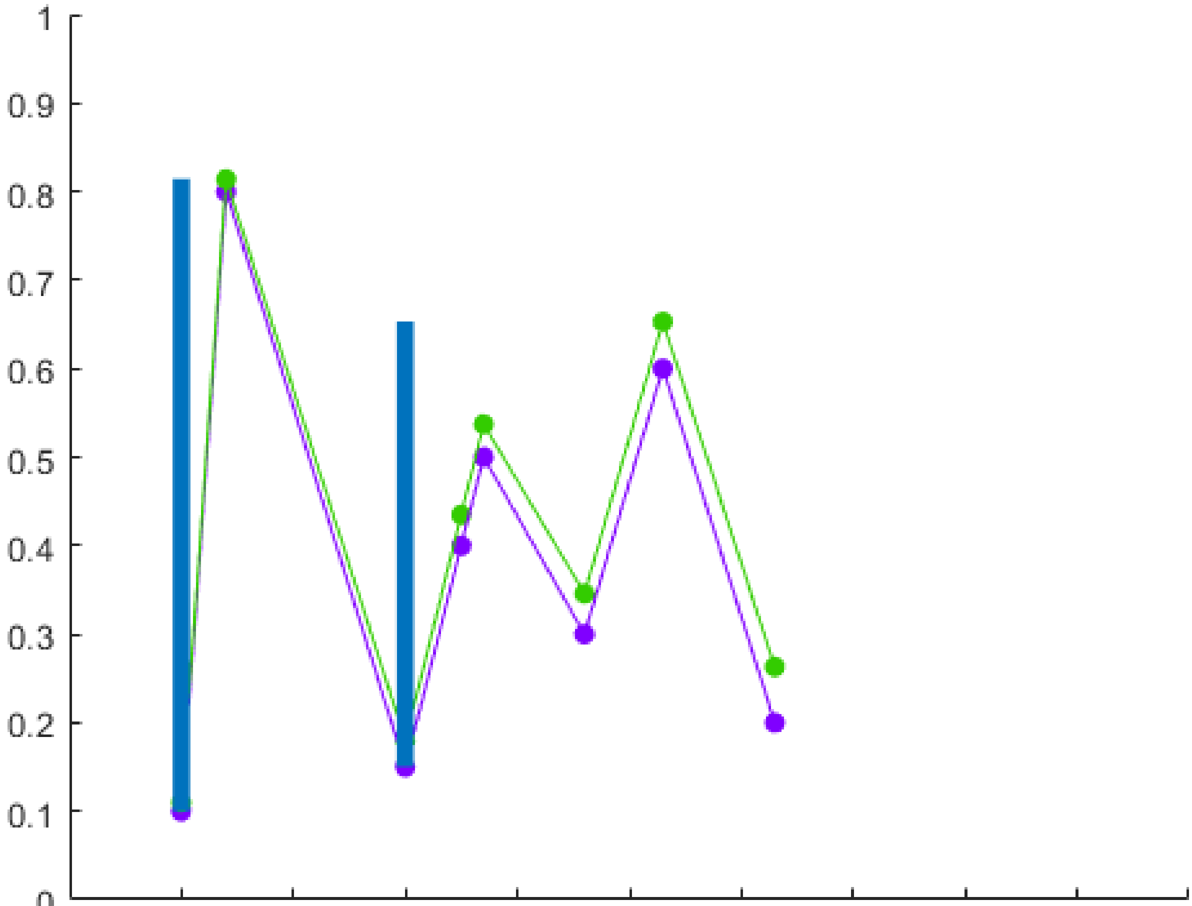
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



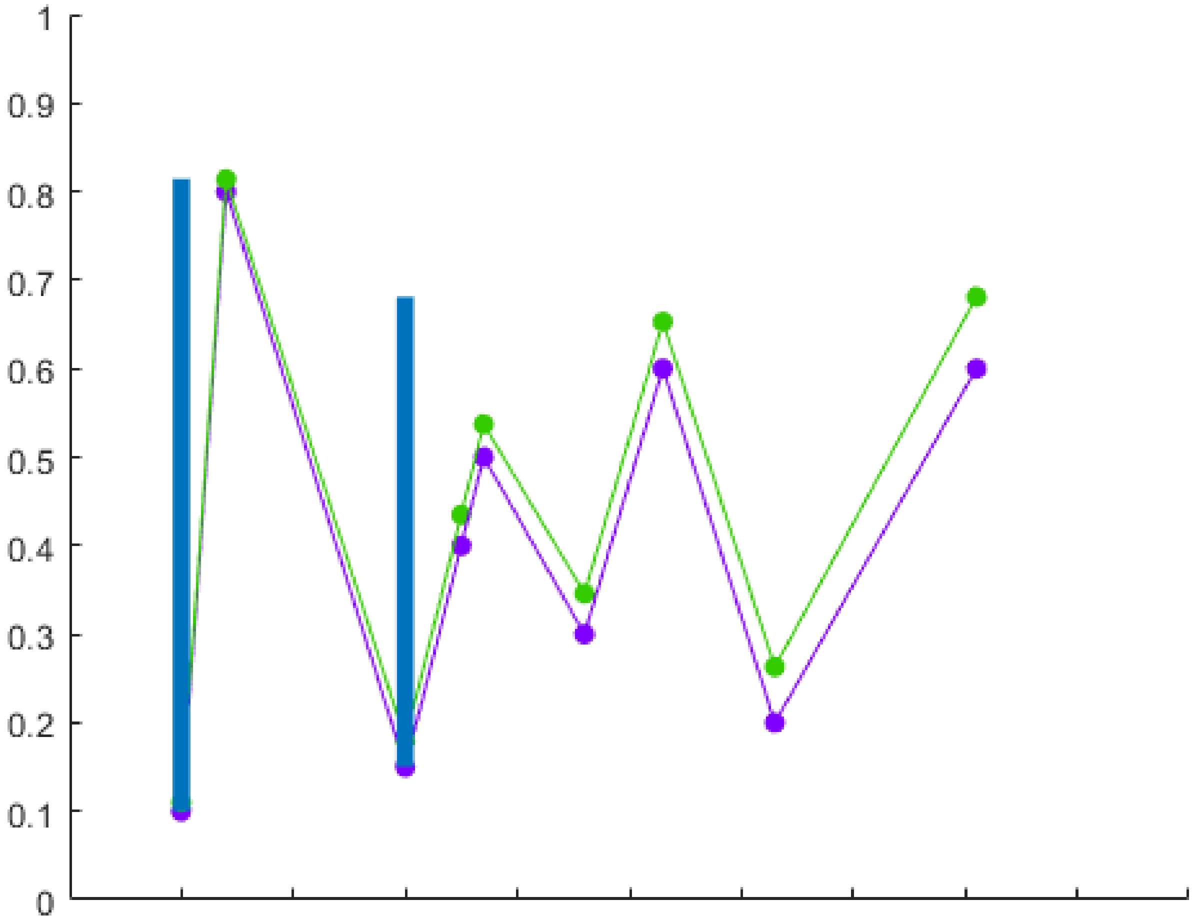
nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



nicht-**LEFT-CE**-Fall: Testkonstruktion



Allgemeiner Fall: Problematik

Annahme: es gibt eine monotone Übersetzungsfunktion g sowie $c < d$ in $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$(\exists^\infty n : \frac{\alpha - g(q_n)}{\beta - q_n} < c) \wedge (\exists^\infty n : \frac{\alpha - g(q_n)}{\beta - q_n} > d).$$

Sei weiter $q_0, q_1, \ldots$ eine nicht-monotone Aufzählung des Definitionsbereichs von g.

Problem:

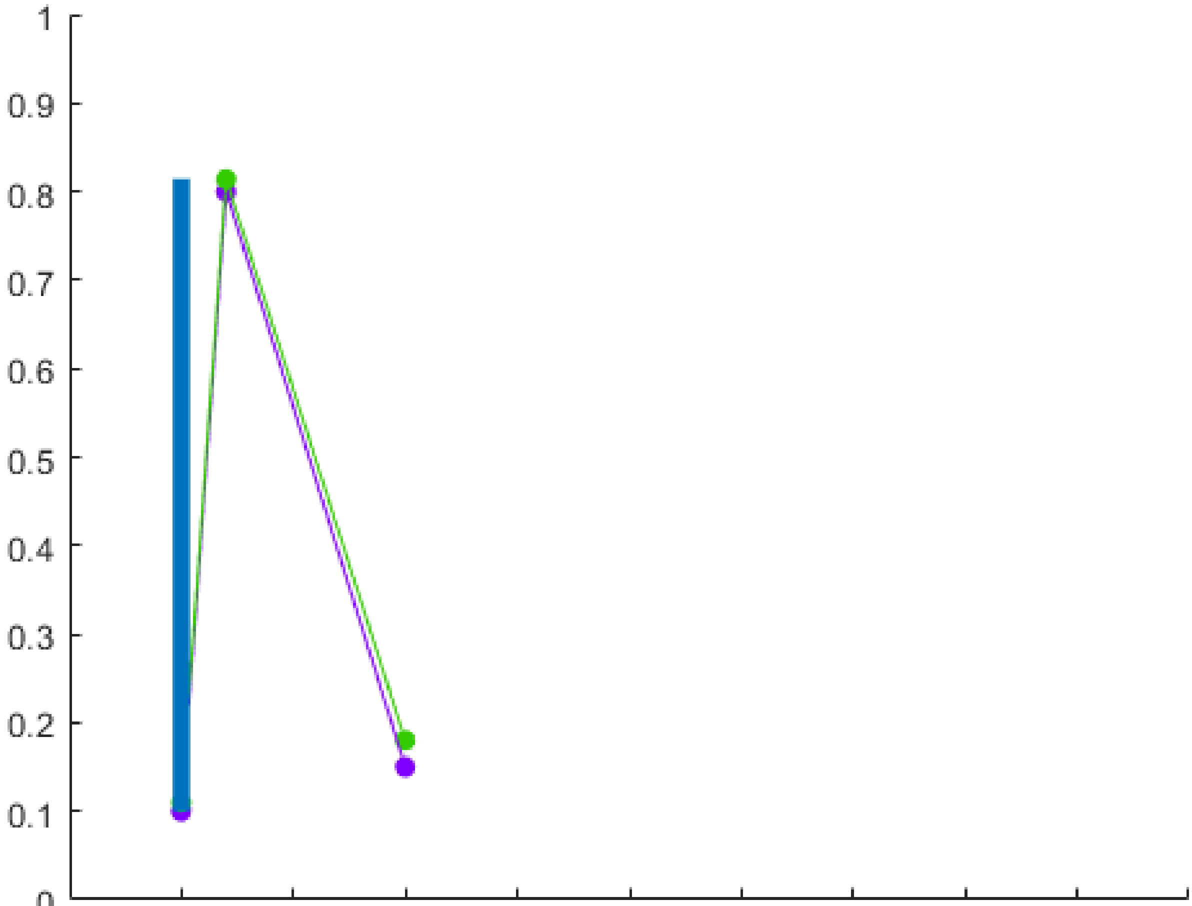
- $Test(\{q_0, \ldots, q_i\}) \not\subseteq Test\{q_0, \ldots, q_i\}$
- $k_{Test(\{q_0,\ldots,q_i\})}(r) \not\leq k_{Test(\{q_0,\ldots,q_{i+1}\})}(r)$

Änderung der Testkonstruktion

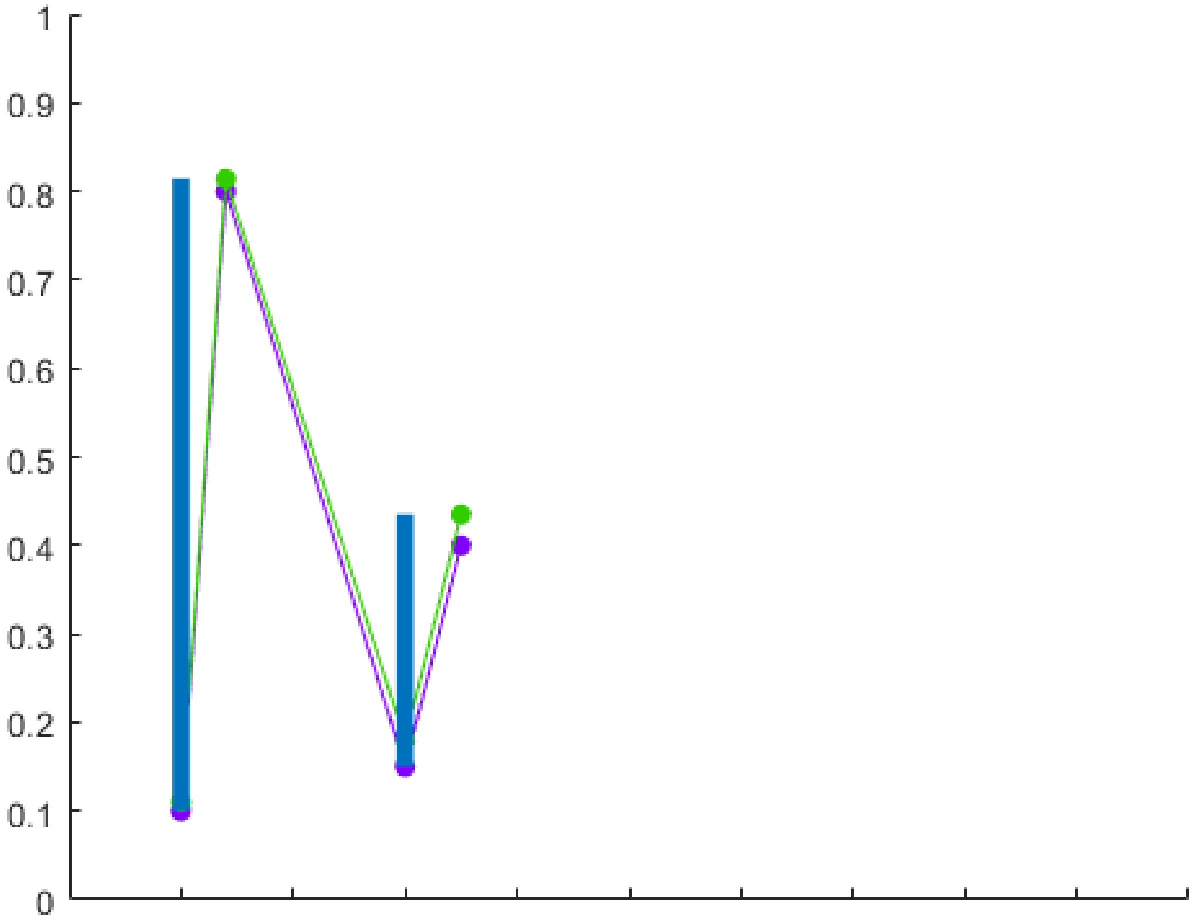
$$Test(q_0, \ldots, q_i) \to Test^+(q_0, \ldots, q_{i+1})$$

- hinzugefügt: retrospektive Nächfüllung von Intervallen bei jedem Schritt.

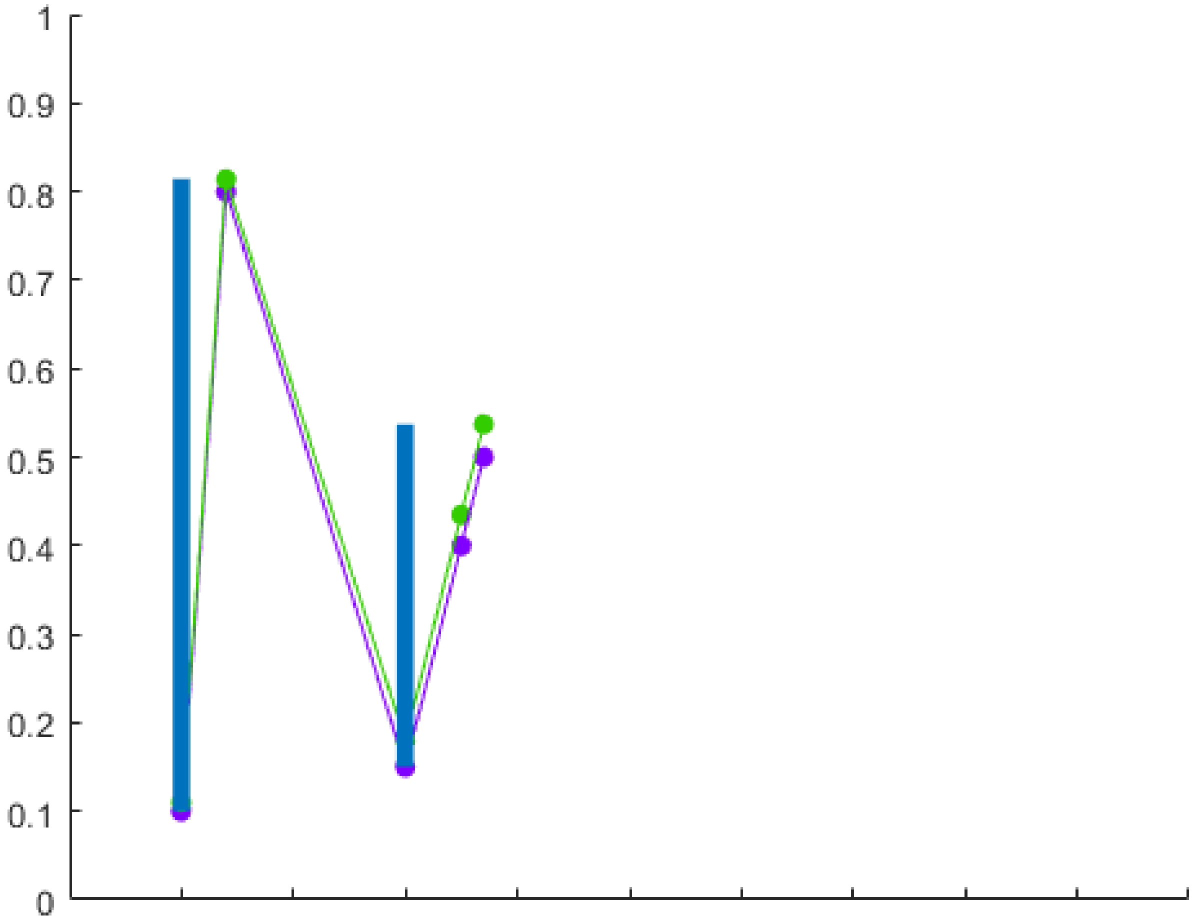
$Test^+$-Konstruktion



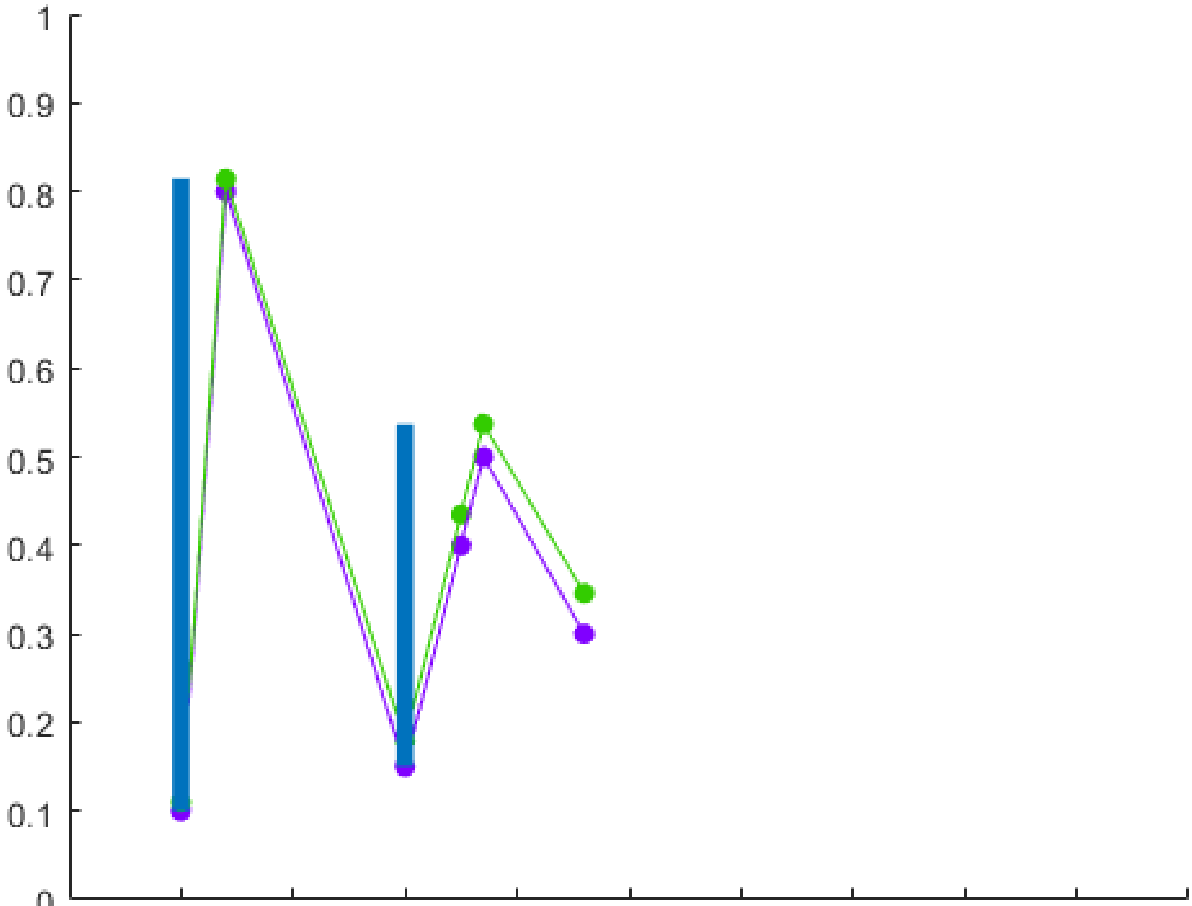
$Test^+$-Konstruktion



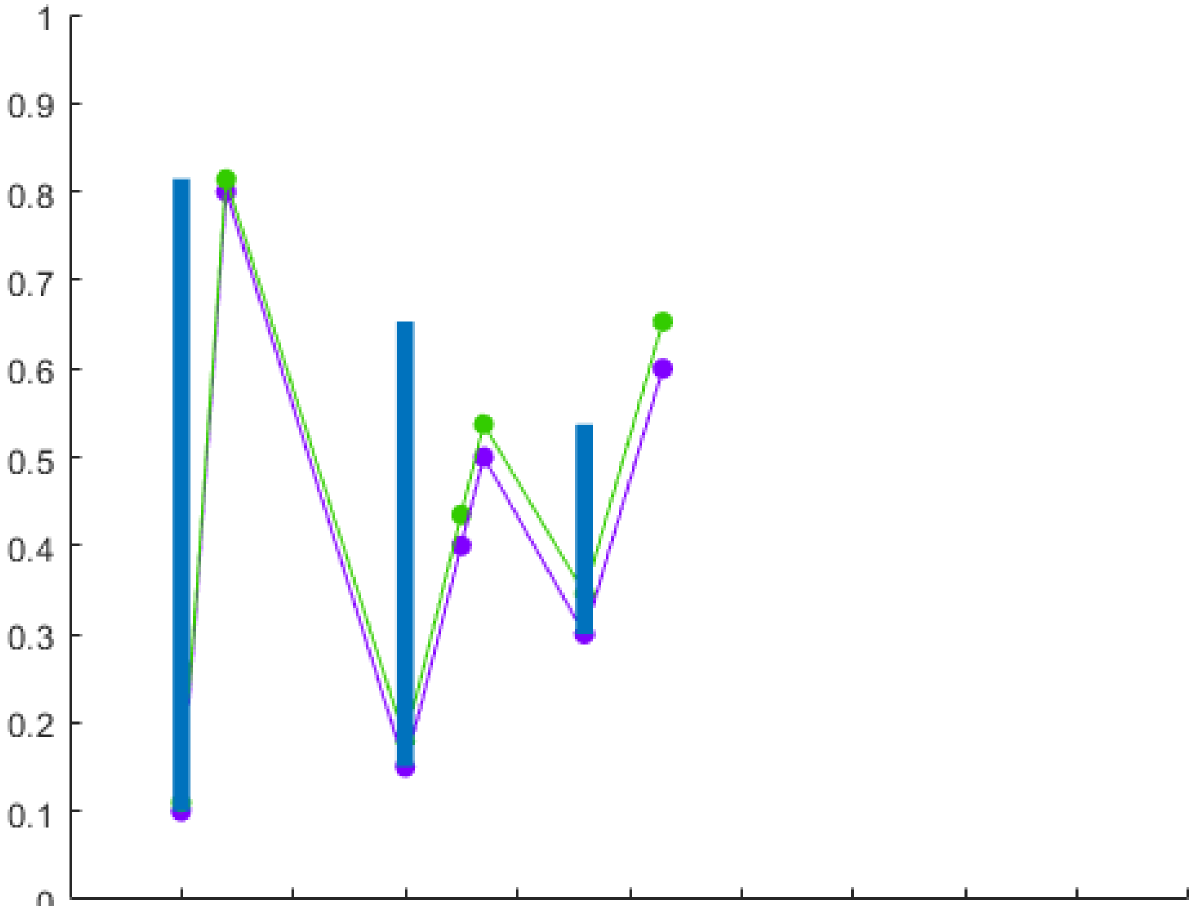
$Test^+$-Konstruktion



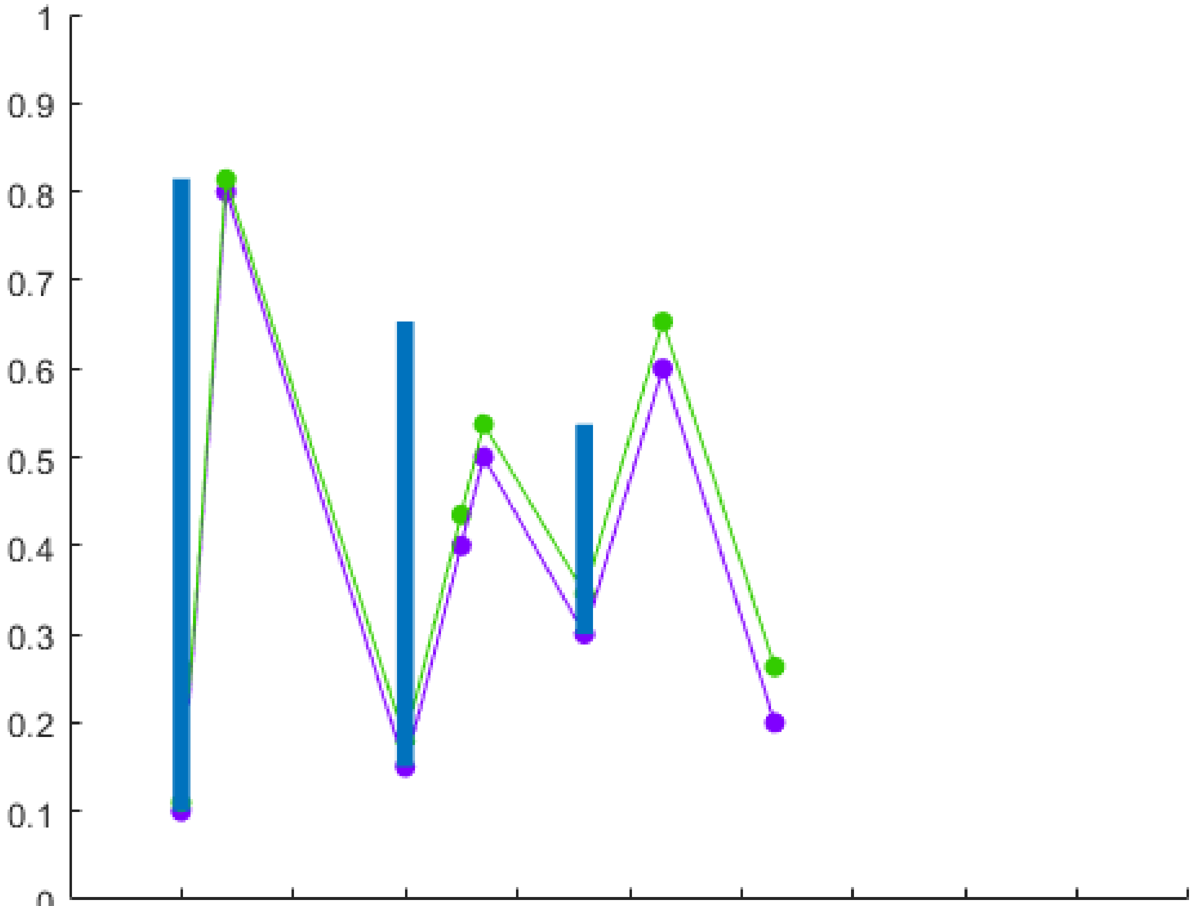
$Test^+$-Konstruktion



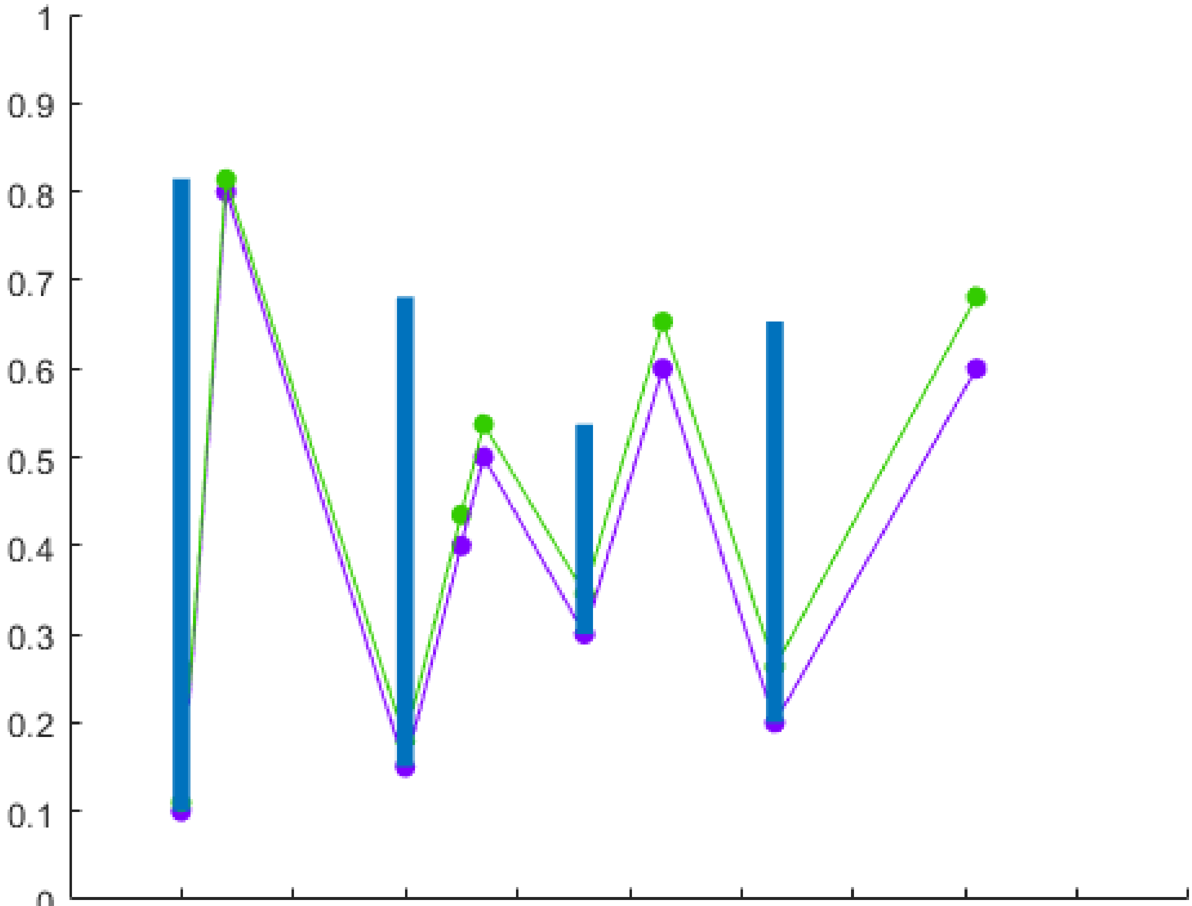
$Test^+$-Konstruktion



$Test^+$-Konstrution



$Test^+$-Konstrution



Allgemeiner Fall: Beweisidee

Solovay-Test $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \to S$, wo jeder endliche Test durch

$$k_{S_i}(r) = \max_{A \subseteq \{q_0,\ldots,q_i\}} \{k_{Test^+(A)}(r)\}$$

angegeben wird, überdeckt $(d-c)\beta$ unendlich oft, denn:

- $S_i \subseteq S_{i+1}$,
- $\exists C \forall i : \mu(S_i) < C$,
- $k_{S_i}((d-c)\beta) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Beschleunigbarkeit

Der Satz von Barmpalias und Lewis-Pye für $\alpha = \beta$ motiviert den Begriff der **Beschleunigbarkeit**:

Definition

Eine Zahl α ist **beschleunigbar**, wenn $\alpha \leq_{\mathrm{S}}^{m} \alpha$ mit Konstante 1 via eine Übersetzungsfunktion g ist, die $g(q) > q$ auf dem gesamten Definitionsbereich und

$$\liminf_{q \nearrow \alpha} \frac{\alpha - g(q)}{\alpha - q} \leq \rho$$

für ein $\rho < 1$ erfüllt.

Auf **LEFT-CE** lässt sich diese Definition im Bezug auf Indexfunktionen formulieren:

Äquivalente Definition (**LEFT-CE**-Fall)

*Eine linksberechenbare Zahl α ist **beschleunigbar**, wenn es eine Linksapproximation $a_0, a_1, \ldots \nearrow \alpha$ und eine berechenbare Indexfunktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) > n$ existiert, die*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\alpha - a_{f(n)}}{\alpha - a_n} < \rho$$

für ein $\rho < 1$ erfüllt.

Beschleunigbarkeit: Eigenschaften

Eigenschaft	Beschleunigbarkeit auf **LEFT-CE**	Beschleunigbarkeit auf $\mathbb{R}$
Robustheit	unabhängig von der Wahl der Konstante $\rho > 0$, unabhängig von der Wahl der Linksapproximation $b_0, b_1 \cdots \nearrow \beta$	unabhängig von der Wahl der Konstante $\rho > 0$,
Gradeigenschaft	$\alpha \equiv_S \beta$ impliziert immer (α beschl-bar $\iff$ β beschl-bar)	
ML-Zufälligkeit	alle ML-zufällige linksberechenbare Zahlen sind unbeschleunigbar es existiert eine unbeschleunigbare ML-nicht-zufällige linksberechenbare Zahl (Hölzl, Janicki, 2023)	alle ML-zufällige Zahlen sind unbeschleunigbar, es existiert eine unbeschleunigbare ML-nicht-zufällige rechtsberechenbare Zahl (Titov, 2023)

Literaturquellen

- George Barmpalias and Andrew Lewis-Pye, *Differences of halting probabilities*, Journal of Computer and System Sciences 89:349–360 (2017).
- Rodney Downey and Evan Griffiths, *Schnorr randomness*, Journal of Symbolic Logic 69(2):533–554 (2004).
- Rodney Downey and Denis Hirschfeldt, *Algorithmic Randomness and Complexity*, Springer, Berlin (2010).
- Wolfgang Merkle and Ivan Titov, *Speedable left-c.e. numbers*, CSR 2020: Computer Science – Theory and Applications pp 303–313 (2020).
- Wolfgang Merkle und Ivan Titov, *Total variants of Solovay reducibility and speedability*, to be published.
- Kenshi Miyabe, André Nies and Frank Stephan, *Randomness and Solovay degrees*, Journal of Logic and Analysis 10(3):1–13 (2018).
- Joseph Miller, *On work of Barmpalias and Lewis-Pye: A derivation on the d.c.e. reals*, Lecture Notes in Computer Science 10010:644—659 (2016).
- André Nies, *Computability and Randomness*, Oxford University Press (2012).